CONCOURS COMMUN 2008
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, au point M de coordonnées (x, y) on associe l'affixe $m = x + iy$.
Le conjugué de z est noté $\overline{z}$, son module $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, et sa partie réelle $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ le complexe solution de $X^2 + X + 1 = 0$, et on rappelle que $\overline{j} = j^2$.

Etude d'une inégalité

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a| = \mathrm{Re}(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.

2. Soit $z, w \in \mathbb{C}$, montrer l'égalité suivante : $(|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = 2\left(|z\overline{w}| - \mathrm{Re}(z\overline{w})\right)$.

3. En déduire l'inégalité suivante : $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ et montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, z et w sont les affixes de deux points situés sur une même demi-droite issue de l'origine.

La notion de $(p : q)$ point

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
Soient p et q deux réels strictement positifs.

4. Pour $A \neq B$, montrer qu'il existe un unique point d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-a}{b-z} = \dfrac{p}{q}$, on l'appelle le $(p : q)$ **point** de A à B. Donner son affixe.

5. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$, montrer que le $(p : q)$ **point** de A à B et le $(\alpha p : \alpha q)$ **point** de A à B coïncident.

6. Caractériser le $(1 : 1)$ **point** de A à B.

7. A, B, C désignent trois points distincts deux à deux, on notera c l'affixe de C. Soient X le $(p : q)$ **point** de A à B et Y le $(p : q)$ **point** de A à C. Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).

La notion de $(p : q)$ sous-triangle

On appelle $(p : q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(ABC)$, le triangle $\Delta(A'B'C')$ où
A' est le $(p : q)$ **point** de A à B d'affixe a',
B' est le $(p : q)$ **point** de B à C d'affixe b',
C' est le $(p : q)$ **point** de C à A d'affixe c'.

8. Donner l'affixe de l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle $\Delta(ABC)$.

Indication : Il s'agit de la moyenne arithmétique des affixes des sommets du triangle.

9. Montrer que le $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(ABC)$ a le même isobarycentre que $\Delta(ABC)$.

Etude de suites

On va considérer une suite de triangles $\Delta(A_kB_kC_k)$ construits de la manière suivante.
Le triangle $\Delta(A_0B_0C_0)$ est fixé (les points deux à deux distincts). Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta(A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1})$ est le $(p:q)$ **sous-triangle** du triangle $\Delta(A_kB_kC_k)$.
On note, pour $k \in \mathbb{N}$, par a_k, b_k et c_k les affixes respectives des points A_k, B_k et C_k.

10. Montrer que les affixes vérifient la relation matricielle suivante : $\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}$.

11. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = a_k + b_k + c_k$, $\beta_k = a_k + jb_k + j^2c_k$, $\gamma_k = a_k + j^2b_k + jc_k$. Vérifier que les suites $(\alpha_k)_k$, $(\beta_k)_k$ et $(\gamma_k)_k$ sont géométriques de raison 1, $\dfrac{q+j^2p}{p+q}$ et $\dfrac{q+jp}{p+q}$ respectivement, et qu'elles sont toutes convergentes en précisant leur limite. (On pourra utiliser la question **3.**.)

On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on va prouver que V est inversible, et préciser son inverse.

12. Soit $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C = BQ$. Comment se déduit la matrice C de la matrice B ?

13. Montrer que le déterminant de V vaut $3j(j-1)$. Montrer que V est inversible. Calculer V^2, en déduire que V^{-1} est de la forme $\frac{1}{m}VQ$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ à préciser.

14. En remarquant que $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$, en déduire que les suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$ sont toutes les trois convergentes, et préciser leur limite.

Etude d'une application linéaire

On définit l'application suivante : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & V^{-1}MV \end{array}$

15. Montrer que φ est une application linéaire qui vérifie $\forall (M,N) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})^2$, $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

16. On considère l'application ψ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $\psi(M) = VMV^{-1}$. Calculer $\psi \circ \varphi$. Montrer que φ est une application bijective.

17. On pose $A_{(p,q)} = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}$. Calculer $A_{(p,q)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que $A_{(p,q)}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \dfrac{q+jp}{p+q}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, et donner une expression similaire pour $A_{(p,q)}\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

18. En déduire, sans calcul, que $\varphi(A_{(p,q)}) = D$ où D est une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

19. On rappelle que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est un anneau commutatif, en déduire que deux matrices quelconques de l'ensemble $\left\{A_{(p,q)}/(p,q) \in]0,+\infty[\right\}$ commutent.

20. Montrer que $A_{(1,n)} \ldots A_{(1,2)}A_{(1,1)} = VD_nV^{-1}$ où D_n est une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $(1, \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+j^2}{k+1})$. Montrer que les suites $\left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+j}{k+1}\right)_n$ et $\left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+j^2}{k+1}\right)_n$ sont convergentes vers 0. (On pourra admettre que $\left|1+\dfrac{j}{k}\right| \leqslant 1$ et $\left|1+\dfrac{j^2}{k}\right| \leqslant 1$.)