DL 2 – Sujet Centrale

Définitions et notations

On rappelle le résultat suivant toute partie X **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.

Les questions de programmation sont à résoudre en utilisant le langage `Ocaml`.

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)}=x$.

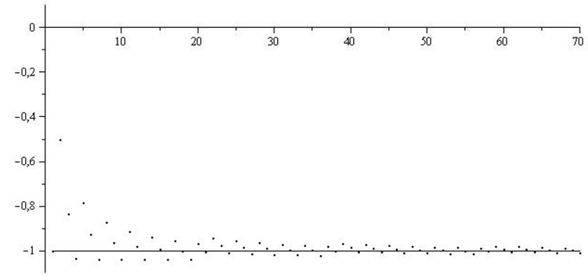
I.A - On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geqslant 0}$, $(q_n)_{n\geqslant 0}$, $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de réels de la manière suivante

- $p_0=q_0=0,\ S_0=0$
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $S_n>x$ alors $q_{n+1}=1+q_n,\ p_{n+1}=p_n,\ s_{n+1}=2q_{n+1}-1$
  sinon $q_{n+1}=q_n,\ p_{n+1}=1+p_n,\ s_{n+1}=2p_{n+1}$
  Dans les deux cas $S_{n+1}=S_n+u_{s_{n+1}}$

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie la liste $[s_n; s_{n-1}\dots; s_1]$.

I.A.2) En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées $(n,S_n)_{n\leqslant 70}$ et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour $x=-1$, $n=70$ le dessin suivant



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B - On pose dorénavant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $s(n)=s_n$. Prouver, pour $n\geqslant 1$, les propriétés suivantes

$$\{s(1),s(2),\dots,s(n)\}=\{2,4,\dots,2p_n\}\cup\{1,3,\dots,2q_n-1\}$$
$$p_n+q_n=n$$
$$S_n=u_{s(1)}+\cdots+u_{s(n)}$$

En déduire que s est injective.

I.C -

I.C.1) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser le I.C.1) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$,

$$S_n>x \quad \text{et} \quad S_n=S_{n_0}-\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{2q_{n_0}+2k-2n_0+1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3) Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.

I.C.4) Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.

I.D -

I.D.1) Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 0$, on a

$$|S_{n+1}-x|\leqslant|S_n-x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1}-x|\leqslant|u_{s(n+1)}|$$

I.D.2) En déduire que pour tout naturel N, il existe un entier $n>N$ tel que $|S_{n+1}-x|\leqslant|u_{s(n+1)}|$.

I.D.3) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, $p_n\geqslant 1$ et $q_n\geqslant 1$.

I.D.4) Soit $n\geqslant n_0$. On note $v_n=\max\left(|S_n-x|,|u_{2p_{n+1}}|,|u_{2q_{n+1}-1}|\right)$.
Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

I.E -

I.E.1) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma>0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1) \text{ quand } n\to+\infty.$$

I.E.2) Donner un développement analogue pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

I.E.3)

a) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$, l'égalité $S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$.

b) En déduire que $S_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln 2 + o(1)$.

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d) Déterminer la limite de

$$\frac{|u_{s(1)}|+|u_{s(2)}|+\cdots+|u_{s(n)}|}{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A - Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

II.B - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge.

II.B.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite.

II.B.2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P_2).

II.C - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (P_1).

II.D - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$.
- Pour $n \geqslant 1$ $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} \quad \text{si} \quad A_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \text{ sinon} \end{cases}$

  Dans tous les cas $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n$.

II.D.1) Dans cette question seulement on suppose que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{9}{4(n+1)}$.

Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Écrire une fonction `exemple` qui prend en argument l'entier n et retourne la liste

$$[[n; p_n; \varepsilon_n; A_n]; \ldots; [1; p_1; \varepsilon_1; A_1]; [0; p_0; \varepsilon_0; A_0]]$$

II.D.2)

a) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \,/\, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Dans le cas général, calculer p_{n_k}, ε_{n_k}.

Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.

c) Déterminer n_1, n_2 et n_3 pour l'exemple de la question III.B.1).

II.D.3) Dans cette question seulement on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$.

a) Écrire une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne la liste

$$[[q; n_q]; \ldots; [1; n_1]; [0; n_0]]$$

où q est le plus grand des entiers k tel que $n_k \leqslant n$. Par exemple l'appel de `indexer(10000)` retourne `[ [3; 51];[2; 2];[1; 1];[0; 0]]`.

b) Soit $k \geqslant 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité

$$k - 1 \leqslant A_{n_k - 1} \leqslant k - 1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k - 1}$ en fonction de k, n_k et n_{k+1}. En déduire, pour $k \geqslant 3$, l'inégalité

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leqslant \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geqslant 3$, l'inégalité

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leqslant \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n_k \underset{k\to\infty}{\sim} C \exp\left(2^k\right).$$

en déduire que

$$A_{n_k} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$$

puis que

$$A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

II.F - Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

II.F.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.

II.F.3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4) Caractériser les suites vérifiant (P_2).

• • • FIN • • •