2

Séries numériques

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries ~~à valeurs dans un espace normé de dimension finie~~	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente ~~d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie~~ est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les séries (MP2I)

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition 1 : Série, convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.
Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}.$$

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.
$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarque

R 1 – Enlever un nombre fini de termes à S_n ne change pas sa convergence.

Autrement dit, si I est fini, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n$ sont de même nature. En effet, si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus I} u_k$ et si $n > \max I$, $S_n = \Sigma_n + \sum_{n\in I} u_n$. Lorsqu'elles sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n + \sum_{n\in I} u_n$.

R 2 – Une série peut n'être définie que pour $n \geqslant n_0$, et on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ la série dans ce cas.

R 3 – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc.
Cependant, en général, c'est en étudiant **son terme général** u_n (et non les sommes partielles) qu'on déduit des propriétés de la série.

R 4 – Ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui n'est pas une somme !) et le **nombre** (lorsqu'il existe) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$ (qui s'appelle somme de la série et qui n'est pas une somme ! C'est une limite...)

Propriété 1 : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Exemple : Série harmonique alternée

E 1 – $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente de somme $\ln 2$.

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

puis

$$|S_n - \ln 2| \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Autre preuve possible : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$.

Propriété 2 : Série exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}$.

Démonstration

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, pour tout n, $f^{(n)}(0) = z^n$.
L'inégalité de Taylor-Lagrange nous dit alors que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)(0)} \right| = \left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,1]} \left(\left| f^{(n+1)}(t) \right| \right)$$

Or, si $t \in [0,1]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|z^{n+1}\mathrm{e}^{tz}\right| = |z|^{n+1}\mathrm{e}^{t\mathfrak{Re}(z)} \leqslant |z|^{n+1}\mathrm{e}^{t\mathfrak{Re}(z)} \leqslant |z|^{n+1}\max\left(1,\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\right) = |z|^{n+1}M(z)$ (indépendant de t).

Donc $\left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}M(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$.

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1}=0$)

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = S_n - S_{n-1}}$$

Inversement, une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général u_n ?

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + u_1 \\ v_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 - v_0 \\ u_2 = v_2 - v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

Propriété 3 : Série télescopique

*Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1}=0$) appelée **série télescopique**.*

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{-1} = v_n.$$

Corollaire 1

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1}-v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$

Exercice 1 : Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de la somme.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La série est télescopique, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc la série est convergente, de somme 1.

Exercice 2 : Nature de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

La série est télescopique, $S_n = \ln(n+1) - 0 \to +\infty$ donc la série diverge.

Remarque

R5 – Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série.
Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

3 Espace vectoriel des termes généraux de séries convergentes

Propriété 4 : Combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} (u_n + \lambda v_n) = S_n + \lambda \Sigma_n$. ∎

Remarque

R6 – Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

R7 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de $\sum (u_n + v_n)$.

R8 – Si $\sum v_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum (\lambda v_n)$ diverge si et seulement si $\lambda \neq 0$.

Propriété 5 : Convergence des séries à termes complexes

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\, u_n$$

Remarque

R9 – Lorsqu'il y a convergence,

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n)$$

et

$$\mathfrak{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n).$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété 6 : Divergence grossière

Si $u_n \not\to 0$, alors $\sum u_n$ diverge.
*On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si (S_n) converge, $u_n \to 0$.

Contre-exemple : si $u_n = \frac{1}{n}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$: **série harmonique**.

$u_n \to 0$ mais $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
On verra plus tard que $H_n \sim \ln n$. ■

5 Reste d'une série convergente

Définition 2 : Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 7 : Reste sous forme de limite

Avec les mêmes hypothèses,

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$$

Démonstration

$S_N - S_n \to S - S_n = R_n$ lorsque $N \to +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ lorsque $N \to +\infty$ ■

Exemple : Série géométrique

E 2 – Si $|q| < 1$, $R_n = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété 8 : Le reste converge vers 0

*Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n, alors $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Démonstration

$R_n = S - S_n$. ■

6 Un critère simple pour des séries à termes positifs

Propriété 9 : Convergence d'une série à termes positifs

*Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors*

(i) (S_n) est croissante.

(ii) (S_n) a une limite finie ou $+\infty$.

(iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

Démonstration

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. ■

7 Séries alternées

Théorème 1 : Spécial sur *certaines* Séries Alternées (TSSA)

*Si $u = (u_n)_n$ est une suite **réelle** telle que*

H1 *u décroissante*

H2 *$u_n \to 0$*

alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, si on note $v_n = (-1)^n u_n$,

- *La somme S a le même signe que son premier terme v_0.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n, a le même signe que son premier terme v_{n+1} et vérifie*

$$|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}.$$

Tous les résultats restent valables pour une série de la forme $\sum (-1)^{n+1} u_n$.

Démonstration

On vérifie que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
$0 \leqslant u_0 - u_1 = S_1 \leqslant S$ donc S a bien le même signe que u_0.
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n}$, donc $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0$ et $0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2} = S_{2n+2} - S_{2n+1}$, ce qui permet bien de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}$ et que R_n a le même signe que v_{n+1}. ■

Exemple

E 3 – $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 3 : CCINP 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) **Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.**

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) **Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.**

2. **Étudier la convergence pour $x\in\mathbb{R}$ fixé de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.**

---

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$.
   - $S_{2n+2}-S_{2n} = u_{2n+2}-u_{2n+1}\leqslant 0$, donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - De même $S_{2n+3}-S_{2n+1}\geqslant 0$, donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - $S_{2n}-S_{2n+1} = u_{2n+1}\longrightarrow 0$.

   On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite.

   Comme $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite, ce qui signifie que la série $\sum(-1)^k u_k$ converge.

   (b) Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$, $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$.
   - Si $x<0$, alors $\left|\frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\longrightarrow +\infty$, donc $\sum\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ diverge grossièrement.
   - Si $x\geqslant 0$, alors $\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, donc d'après 1.(a), $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ converge.

   Remarque : pour $x>0$, on a aussi convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   En effet, pour tout réel $x>0$, $n^2\left|\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}\right| = ne^{-nx}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\left|\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}\right| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

II Convergence absolue, séries à termes réels positifs (MP2I)

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum(-u_n)$ si le signe est négatif.

Théorème 2 : Comparaison des séries à termes réels positifs – cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.*

Si $\sum v_n$ convergeet si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$,
- $u_n = \mathrm{o}(v_n)$,
- *apcr* $u_n\leqslant v_n$,
- $u_n\sim v_n$

alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Dans le premier cas, on a $n_0\in\mathbb{N}$ et $M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ \ u_n\leqslant Mv_n$.

Si S_n et Σ_n désignent respectivement les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors, tout étant positif, $S_n\leqslant S_{n_0}+M(\Sigma_n-\Sigma_{n_0})$ à partir du rang n_0. Comme $\sum v_n$ converge, (Σ_n) est majorée donc (S_n) majorée donc $\sum u_n$ converge.

Les trois autres cas sont des cas particuliers du premier. ∎

Corollaire 2 : Comparaison des séries à termes positifs – cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*
Si $\sum u_n$ diverge et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, ■ $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, ■ *apcr* $u_n \leqslant v_n$, ■ $u_n \sim v_n$

alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Contraposée du théorème. ■

Exemple

E 4 – $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série (géométrique) convergente.

E 5 – $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ terme général d'une série (télescopique) convergente. (On peut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

E 6 – $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car à terme positif et si $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Propriété 10 : Cas de l'équivalence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs** telles que $u_n \sim v_n$.*
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

Symétrie de l'équivalence. ■

Remarque

R 10 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum u_n$ converge, on ne peut rien dire de $\sum v_n$ en général.

Exemple

E 7 – $\frac{1}{n^2} = \mathcal{O}(1)$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum 1$ diverge.

R 11 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

Exemple

E 8 – $\sum \frac{1}{n}$ diverge car à termes positifs $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ terme général d'une série (télescopique) divergente.

E 9 – $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ converge car $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc à termes positifs à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

$\sum \sin \frac{1}{n^3}$ converge et $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

2 Convergence absolue

Définition 3 : Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$converge.

Théorème 3 : convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence

Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.
La réciproque est fausse.

Démonstration

- **Cas où** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: On écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

  Comme $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  Donc, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
- **Cas complexe** : $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent absolument car $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$ donc convergent.

Pour la réciproque fausse, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument. ■

Remarque

R 12 – Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Méthode 1 : Utilisation de la comparaison pour des séries quelconques

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = o(v_n)$ ou que $|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $|u_n| = o(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

Exercice 4 : CCINP 46

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. **Prouver que, au voisinage de** $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **où** α **est un réel que l'on déterminera.**
2. **En déduire que** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ **converge.**
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ **converge-t-elle absolument ?**

---

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

   Donc $v_n = \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées) et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge (par critère de domination), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}$.

   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}|v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.

3 Critère de d'Alembert (MPI)

Propriété 12 : Critère de d'Alembert

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0,+\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Démonstration

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 = \frac{1}{1}$ avec $\sum 1$ divergente donc il y a divergence (grossière). (En fait, $u_n \to +\infty$!)
- Si $\ell < 1$ et $\ell < q < 1$, à partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ donc $u_n \leqslant q^{n-N} u_N$ avec $\sum q^n$ convergente. Donc, comme tout est positif, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, on ne peut rien dire en général. Exemple : $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. ■

Exercice 5 : CCINP 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. **Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.**

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. **Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?**

---

1. Comme $\ell < 1$, soit $q \in]\ell, 1[$.

   Comme $u_n \to \ell < q$, à partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ donc $\frac{u_n}{u_N} = \prod\limits_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q^{n-N}$ puis $u_n \leqslant \frac{u_N}{q^N} q^n$ avec $\sum q^n$ convergente car $q \in]0, 1[$. Donc, comme tout est positif, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \longrightarrow \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

   Donc $\sum u_n$ converge.

4 Comparaison série-intégrale

a Comparaison et caractérisation de convergence

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroît et est continue par morceaux alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

Remarque

R 13 – Il est interdit d'apprendre ces formules par cœur. Le plus important est de savoir les retrouver sur un dessin.

R 14 – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

Propriété 13 : Convergence de série vs. convergence d'intégrale

*Si $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante, **positive** et continue par morceaux alors $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge.*

Démonstration

$\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge si et seulement si elle est majorée si et seulement si S_n est majorée si et seulement si $\sum f(n)$ converge car ces suites sont croissantes.

Remarque

R 15 – En cas de convergence, si on note $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, on a en outre

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b Séries de Riemann

Théorème 4 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Démonstration

Si $\alpha \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
Si $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

a une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, décroissante, et continue, on obtient le résultat.

Pour $\alpha = 1$, cela a déjà été vu et se retrouve avec $\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n \to +\infty$. ■

Remarque

R 16 – On pose pour $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.

ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

Méthode 2 : Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée (par exemple $n^\alpha u_n \to 0$), alors $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple

E 10 – $u_n = \dfrac{\cos n}{n^3}$.

E 11 – $u_n = \dfrac{\operatorname{Arctan} n}{\sqrt{n+1}}$

E 12 – $u_n = \mathrm{e}^{-n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

E 13 – $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

E 14 – $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 6 : CCINP 7

1. **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.**
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$
2. **Étudier la convergence de la série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left((-1)^n + \mathrm{i}\right)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

---

1. On a $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \leqslant 2$, donc à parti d'un rang N, $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 2$, donc $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$.
   Alors, par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.
   Par symétrie de la relation d'équivalence, on a aussi que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge.
2. Soit $n \geqslant 2$? On pose $u_n = \dfrac{\left((-1)^n + \mathrm{i}\right)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$. Alors $|u_n| = \dfrac{\sqrt{2}\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$.
   En prenant $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$, on a $n^\alpha v_n = \dfrac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge par comparaison d'une série à termes positifs à une série de Riemann convergente.
   D'après 1., $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} |u_n|$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge absolument.
   De plus, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

C Séries de Bertrand (HP mais classique)

Méthode 3 : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais **très classique.**

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que la série converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)}$.

- Si $\alpha < 0$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent) $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, avec $\gamma \in]1, \alpha[$, $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ étant convergente, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- Si $\alpha = 1$, on obtient la divergence de la série pour $\beta \leqslant 1$ par comparaison et la convergence de la série pour $\beta > 1$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 7 : CCINP 5

1. **On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.**

   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. **Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.**

---

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$: on a $\forall n \geqslant 2$, $\forall n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{(\ln 2)^\alpha}\dfrac{1}{n}$. Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n}$ diverge.

   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$: la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\left(\displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ sont de même nature.
   Puisque

$$\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln(n)} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left((\ln n)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

   on peut affirmer que $\left(\displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ converge $\iff \alpha > 1$.

   On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

   Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n}.$$

   De plus, au voisinage de $+\infty$,

$$\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\ln n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

   Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$. Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

   Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

d Évaluation des sommes partielles et des restes

La comparaison série-intégrale est un bon outil pour évaluer asymptotiquement les sommes partielles dans le cas de divergence et les restes dans le cas de convergence.

Aucun résultat théorique au programme, voyons-le sur quelques exemples.

Exemple : Cas de divergence

E 15 – Divergence et équivalent des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$: $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante et positive sur

$[2,+\infty[$. Soit avec le w_n, soit : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{n\ln n}\leqslant\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\leqslant\frac{1}{2\ln 2}+\int_2^n\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{n\ln n}\leqslant\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\leqslant\frac{1}{2\ln 2}+\int_2^n\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(\ln n)-\ln(\ln(2))+\frac{1}{n\ln n}\leqslant\sum_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\leqslant\frac{1}{2\ln 2}+\ln(\ln n)-\ln(\ln(2))$$

Donc $\sum\limits_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\to+\infty$.

En fait, on a obtenu mieux que cela : $\sum\limits_{k=2}^n\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)$.

E 16 – **Très classique :** Même question pour $H_n=\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k}$. En déduire la somme de la série harmonique alternée. Par comparaison série-intégrale,

$$\ln n+\frac{1}{n}\leqslant H_n\leqslant\ln n$$

donc $H_n\sim\ln n$.
Puis, si $v_n=H_n-\ln n$,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{-1}{n(n+1)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

terme général d'une série convergente, donc $v_n=H_n-\ln n\to\gamma\in\mathbb{R}$ où γ est appelé constante d'Euler.

$$H_n=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

Cela permet de retrouver le fait que $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$.

E 17 – Équivalent de $\sum\limits_{k=0}^n k^\alpha$ où $\alpha>0$.

Remarque

R 17 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ diverge et $f(n)\to 0$, $S_n\sim F(n)$ où F primitive de f.

Exemple : Cas de convergence

E 18 – On pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$ et on cherche une estimation asymptotique de $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$. Par comparaison à une intégrale,

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}=\int_{n+1}^{N+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=n+1}^N\frac{1}{k^2}\leqslant\int_n^N\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}-\frac{1}{N}$$

puis en faisant $N\to+\infty$

$$\frac{1}{n+1}\leqslant R_n\leqslant\frac{1}{n}$$

et $R_n\sim\frac{1}{n}$ (convergence lente.) Pour une précision de 10^{-2} dans le calcul de $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, il faut prendre $n=100$.
Peut-on faire mieux ? Oui ! On a aussi

$$\left|S-\left(S_n+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|R_n-\frac{1}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

En considérant $S_n+\frac{1}{n}$, on obtient une convergence en $\frac{1}{n^2}$. Cette fois $n=10$ suffit ! On parle de technique d'accélération de convergence.

Remarque

R 18 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ converge de reste R_n, $I=\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_n=\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$,

$$I-I_{n+1}\leqslant R_n\leqslant I-I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de R_n.

III Formule de Striling (MP2I)

Théorème 5 : Formule de Stirling

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Démonstration

- **Première étape** : On montre que $n!\sim K(n/\mathrm{e})^n\sqrt{n}$ avec $K>0$.

  Soit $u_n=\dfrac{n!}{(n/\mathrm{e})^n\sqrt{n}}$. L'idée est de démontrer que $(\ln u_n)$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum(\ln u_{n+1}-\ln u_n)=\sum\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Or

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)^{n+1/2}}$$

  donc

  $$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  Comme $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, $\ln u_n\to\ell\in\mathbb{R}$ et $u_n\to\mathrm{e}^{\ell}=K$ d'où le résultat.

- **Deuxième étape** : Pour déterminer K, on utilise le résultat classique des intégrales de Wallis : si $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$, alors $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_{n+1}$, puis (I_n) décroît, puis $I_{n+1}\sim I_n$, puis $(n+1)I_nI_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}$, puis $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2n}\sim\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et

  $$I_{2n}=\frac{(2n)!}{4^n n!^2}\frac{\pi}{2}\sim\frac{K\pi(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{2\cdot4^nK^2n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}n}=\frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

d'où $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\sim\dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}$ puis $K\sim\sqrt{2\pi}$ donc $K=\sqrt{2\pi}$. ■

Corollaire 3 : Développement asymptotique de $\ln(n!)$

On en déduit un développement asymptotique de $\ln(n!)$ *:*

$$\ln(n!)=n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+\mathrm{o}(1)$$

Démonstration

$$\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right)\to0$$ ■

IV Sommation des relations comparaison (MPI)

1 Cas de divergence

Théorème 6 : Sommation dans le cas de divergence

Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite ***réelle positive****. On suppose que $\sum v_n$* ***diverge****.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.

Remarque

R 19 – C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Démonstration

C'est le même principe que pour le théorème de Césaro. Comme $\Sigma_n \to +\infty$, on a un rang N_0 à partir duquel $\Sigma_n > 0$.

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant M v_n$.
Si $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + M(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant |S_N| + M\Sigma_n$.
Or $\Sigma_n \to +\infty$, donc on a un rang N' tel que si $n \geqslant N'$, $|S_N| \leqslant \Sigma_n$.
Ainsi, pour $n \geqslant \max(N, N')$, $|S_n| \leqslant (M+1)\Sigma_n$ et $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$.
Si $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + \frac{\varepsilon}{2}(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant |S_N| + \frac{\varepsilon}{2}\Sigma_n$.
Si $n \geqslant \max(N, N_0)$, $\frac{|S_n|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{|S_N|}{\Sigma_n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Et enfin $\frac{|S_N|}{\Sigma_n} \to 0$ donc on a un rang N' à partir duquel $\frac{|S_N|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, si $n \geqslant \max(N, N_0, N')$, $|S_N| \leqslant \varepsilon\Sigma_n$ et $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$. Soit $T_n = S_n - \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \mathrm{o}(\Sigma_n)$ par (ii).
Donc $S_n \sim \Sigma_n$. ■

Exemple

E 19 – Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ terme général positif d'une série divergente, donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sum_{k=0}^{n} u_n = 2\sqrt{n+1} - 0 \sim 2\sqrt{n}$.
Se trouve aussi par comparaison série-intégrale.

E 20 – Redémontrer le théorème de Césaro. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{K}$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. On veut montrer que $v_n \to \ell$ soit $v_n - \ell = \mathrm{o}(1)$.

Or $u_n - \ell = \mathrm{o}(1)$ et 1 est un terme général positif de série divergente. Donc $\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) = \mathrm{o}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \mathrm{o}(n)$ soit encore, en divisant par n, $v_n - \ell = \mathrm{o}(1)$.

Si $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to +\infty$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Alors $1 = \mathrm{o}(u_n)$, avec, au moins à partir d'un certain rang $u_n > 0$, donc,

par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, $n = o(S_n)$ donc $\frac{|S_n|}{n} \to +\infty$, puis $S_n = n \times \frac{|S_n|}{n} \to +\infty$ donc à partir d'un certain rang $S_n > 0$ et ainsi $v_n = \frac{S_n}{n} \to +\infty$.
De même ou en changeant u_n en $-u_n$, si $u_n \to -\infty$, $v_n \to -\infty$.

2 Cas de convergence

Théorème 7 : Sommation dans le cas de convergence

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*
On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.*

(ii) *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = o(\rho_n)$.*

(iii) *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.*

Remarque

R 20 – C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Démonstration

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant M v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Si $n, p \geqslant N$, $\left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{p} v_k$. Puis, en faisant $p \to +\infty$, $|R_n| \leqslant M\rho_n$ donc $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Avec le même calcul en remplaçant M par ε, si $n \geqslant N$, $|R_n| \leqslant \varepsilon\rho_n$ donc $R_n = o(\rho_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| \sim v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
$w_n = u_n - v_n = o(v_n)$ donc $\sum w_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o(\rho_n)$.
Or, si $p \geqslant n$, $\sum_{k=n+1}^{p} (u_k - v_k) = \sum_{k=n+1}^{p} u_k - \sum_{k=n+1}^{p} v_k$ donc, en faisant $p \to +\infty$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = R_n - \rho_n = o(\rho_n)$ et donc $R_n \sim \rho_n$. ■