Suites numériques (MP2I)

1

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n\in\mathbb{N}\mapsto u_n\in\mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ n & \longmapsto & u_n\end{array}\right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

I Cas des suites réelles

1 Limites

Définition 1 : Limite

- Une suite $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell\in\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

- On dit que $(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_n\geqslant A$$

ou de manière équivalente

$$\forall A\geqslant 0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_n\geqslant A$$

On note alors $u_n\to+\infty$.

- On dit que $(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n\to+\infty$ soit

$$\forall B\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant B$$

ou de manière équivalente

$$\forall B\leqslant 0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant B$$

On note alors $u_n\to-\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété 1 : Passage des inégalités à la limite

Si $u,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u\to\ell\in\mathbb{R}$ et $v\to\ell'\in\mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n$, alors $\ell\leqslant\ell'$.

*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n<v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell\leqslant\ell'$.*

Propriété 2

Si $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n\to\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ et $a\in\mathbb{R}$, alors

- *Si $\ell>a$, à partir d'un certain rang $u_n>a$.*
- *Si $\ell<a$, à partir d'un certain rang $u_n<a$.*

Théorème 1 : Limite par encadrement

(i) Si $u,v,w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell\in\mathbb{R}$ tels que

- *$v\to\ell$*
- *$w\to\ell$*
- *apcr $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$*

alors $u\to\ell$.

(ii) Si $u,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- *$v\to+\infty$*
- *apcr $u_n\geqslant v_n$*

alors $u\to+\infty$.

(iii) Si $u,w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- *$w\to-\infty$*
- *apcr $u_n\leqslant w_n$*

alors $u\to-\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété 3

Soient $u,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda\in\mathbb{R}$ et $u_n\to\ell\in\mathbb{R}$, alors $\lambda u_n\to\lambda\ell$.

(ii) Si $u\to0$ et v bornée, alors $uv\to0$.

Propriété 4 : Limite de somme et produit

Si $u\to\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$ et $v\to\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- *$u+v\to\ell_1+\ell_2$*
- *$uv\to\ell_1\ell_2$*

Propriété 5 : Limite d'inverse

- *Si $u_n\to\ell\in\overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n\neq0$ et $\dfrac{1}{u_n}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$*
- *Si $u_n\to0$ et à partir d'un certain rang $u_n>0$, alors $\dfrac{1}{u_n}\to+\infty$.*
- *Si $u_n\to0$ et à partir d'un certain rang $u_n<0$, alors $\dfrac{1}{u_n}\to-\infty$.*

Propriété 6 : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.*
- *Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

II Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) *Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).*

(ii) *Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).*

Corollaire 1

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).

De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition 2 : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété 7

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

III Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété 8 : Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & x \leqslant \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, & a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & x \geqslant \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, & a_n \to \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Définition 3 : Partie dense dans $\mathbb{R}$

Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \varnothing$.

Propriété 9 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire 2 : Cas des réels et des décimaux

(i) *Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.*

(ii) *$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

IV EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

Notation 1 : Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'une suite complexe

Soit $z=(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{Re}(z)=(\mathfrak{Re}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{Im}(z)=(\mathfrak{Im}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{z}=\left(\overline{z_n}\right)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $|z|=(|z_n|)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 4 : Convergence de suite complexe

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell\in\mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n-\ell|\to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N},\ \forall\,n\geqslant N,\ |z_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Propriété 10

Soit $(z_n)\in\mathbb{C}^n$ *et* $\ell\in\mathbb{C}$.

$$z_n\to\ell\iff\mathfrak{Re}\,z_n\to\mathfrak{Re}\,\ell\text{ et }\mathfrak{Im}\,z_n\to\mathfrak{Im}\,\ell$$

Définition 5

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall\,n\in\mathbb{N},\ \ |z_n|\leqslant M$.

Propriété 11 : Suites géométriques complexes

Soit $q\in\mathbb{C}$.

- *Si* $q=1$, $q^n\to 1$.
- *Si* $|q|<1$, $q^n\to 0$.
- *Si* $|q|>1$, (q^n) *n'est pas bornée et donc diverge.*
- *Si* $|q|=1$ *et* $q\neq 1$, (q^n) *diverge en étant bornée.*

V SUITES RÉCURRENTES

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall\,n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f:D\to\mathbb{R}$.

Propriété 12

Si $u_n\to\ell\in D$ *et si* f *est continue en* ℓ, *alors* $f(\ell)=\ell$ *(ℓ est un point fixe de f).*

Méthode 1 : Étude générique de suite récurrente

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous !
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** f : I tel que $f(I)\subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0}\in I$, la suite est bien définie et $\forall\,n\geqslant n_0,\ \ u_n\in I$.
  Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x)=f(x)-x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0}\in I$, alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0}\leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right)\geqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
    $$u_n=f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right)\leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right)=u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0}\geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right)\leqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
    $$u_n=f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right)\geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right)=u_{n+1}.)$$
  - ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0}\in I$, alors $(u_{2n})_{n\geqslant\frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant\frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1}=f\circ f(v_n)$ avec $f\circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f\circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

2 Cas d'une fonction contractante

Définition 6 : Fonction contractante

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k<1$ tel que $\forall\,x,x'\in I,\ \ \left|f(x)-f(x')\right|\leqslant k\left|x-x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».

Méthode 2 : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell \in I$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in I$ stable par f, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n|u_0 - \ell| \to 0$$

Donc directement $u_n \to \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 3 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 *On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathring{I},\ |f'(t)| \leqslant k$.*

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall x, x' \in [a,b],\ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|.$$

VI Relations de comparaison

1 Définition

Définition 7 : Relations de comparaison

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathcal{O}(v)$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$, soit encore $u - v = \mathrm{o}(v)$, c'est-à-dire $u = v + \mathrm{o}(v)$.

Propriété 13 : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n\ln n \ll n^2$.

Propriété 14

$$u \sim v \iff u = v + \mathrm{o}(v)$$

2 Propriétés

Propriété 15 : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) *Si $\alpha \neq 0$, $u = \mathrm{o}(\alpha v) \implies u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathcal{O}(\alpha v) \implies u = \mathcal{O}(v)$.*

(ii) *$u = \mathrm{o}(1) \iff u \to 0$ et $u = \mathcal{O}(1) \iff u$ bornée.*

(iii) *Si $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathcal{O}(v)$ et la réciproque est fausse.*

(iv) ***Transitivité***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \implies u = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies u = \mathcal{O}(w)$$

(v) ***Combinaison linéaire***

$$u = \mathrm{o}(w) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathcal{O}(w) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathcal{O}(w)$$

(vi) ***Produit***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } a = \mathrm{o}(b) \implies ua = \mathrm{o}(vb)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } a = \mathcal{O}(b) \implies ua = \mathcal{O}(vb)$$

Propriété 16 : Propriétés de $\sim$

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

(ii) *Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.*

(iii) *$u \to \ell\ \boxed{\neq 0} \iff u \sim \ell$.*

(iv) *Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

(v) *Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\dfrac{u}{a} \sim \dfrac{v}{b}$.*

(vi) *Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.*

(vii) *Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

3 Équivalents usuels

Propriété 17 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Propriété 18 : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \to 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $e^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\operatorname{Arctan} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{Arcsin} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{sh} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{th} h_n \sim h_n$

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition 8 : Développement asymptotique

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(r)} + o\left(v_n^{(r)}\right)$$

où $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \cdots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in [\![1, r-1]\!],\ v_n^{(k+1)} = o\left(v_n^{(k)}\right)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision $v_n^{(r)}$.**

Méthode 3 : Calcul de développement asymptotique

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + o(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + o(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

VII Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition 9 : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété 19

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition 10 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $\mathbb{K}$) de suite extraite de u.

Propriété 20

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire 3

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété 21

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème 4 : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.