1 Suites numériques (MP2I)

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n\in\mathbb{N}\mapsto u_n\in\mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ n & \longmapsto & u_n\end{array}\right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

I Cas des suites réelles

1 Limites

Définition 1 : Limite

- Une suite $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell\in\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,N\in\mathbb{N},\quad \forall\,n\geqslant N,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

- On dit que $(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall\,A\in\mathbb{R},\quad \exists\,N\in\mathbb{N},\quad \forall\,n\geqslant N,\quad u_n\geqslant A$$

  ou de manière équivalente

$$\forall\,A\geqslant 0,\quad \exists\,N\in\mathbb{N},\quad \forall\,n\geqslant N,\quad u_n\geqslant A$$

  On note alors $u_n\to+\infty$.

- On dit que $(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n\to+\infty$ soit

$$\forall\,B\in\mathbb{R},\quad \exists\,N\in\mathbb{N},\quad \forall\,n\geqslant N,\quad u_n\leqslant B$$

  ou de manière équivalente

$$\forall\,B\leqslant 0,\quad \exists\,N\in\mathbb{N},\quad \forall\,n\geqslant N,\quad u_n\leqslant B$$

  On note alors $u_n\to-\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété 1 : Passage des inégalités à la limite

Si $u,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u\to\ell\in\mathbb{R}$ et $v\to\ell'\in\mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n$, alors $\ell\leqslant\ell'$.
*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n<v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell\leqslant\ell'$.*

Démonstration

Soit $\varepsilon>0$.
On a $N_1,N_2,N_3\in\mathbb{N}$ tels que

- si $n\geqslant N_1$, $|u_n-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n\geqslant N_2$, $|v_n-\ell'|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n\geqslant N_3$, $u_n\leqslant v_n$.

Alors si $n\geqslant\max(N_1,N_2,N_3)$, $\ell-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant\ell'+\frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, $\forall\,\varepsilon>0,\quad \ell-\ell'\leqslant\varepsilon$.
Donc $\ell-\ell'$ minore $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ell-\ell'\leqslant\inf\mathbb{R}_+^*=0$, d'où le résultat.

Contre-exemple pour l'inégalité stricte : si $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$ et les deux suites tendent vers 0.

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- *Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.*
- *Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.*

Démonstration

Si $\ell = \pm\infty$, c'est la définition (quitte à prendre $A = a+1$ ou $B = a-1$).
Si $\ell \in \mathbb{R}$, on choisit $\varepsilon = |\ell - a|$.

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < \ell - a$ donc $u_n > \ell - (\ell - a) = a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < a - \ell$ donc $u_n < \ell + (a - \ell) = a$.

Théorème 1 : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- *$v \to \ell$*
- *$w \to \ell$*
- *apcr $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- *$v \to +\infty$*
- *apcr $u_n \geqslant v_n$*

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- *$w \to -\infty$*
- *apcr $u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to -\infty$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$.
On a $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\forall\, n \geqslant N_1,\ \ |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
- $\forall\, n \geqslant N_2,\ \ |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
- $\forall\, n \geqslant N_3,\ \ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

Alors si $N = \max(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant N$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

(ii) Soit $A \in \mathbb{R}$.
On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\forall\, n \geqslant N_1,\ \ v_n \geqslant A$
- $\forall\, n \geqslant N_3,\ \ u_n \geqslant v_n$

Alors si $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$.

(iii) $-w \to +\infty$ et apcr $-u_n \geqslant -w_n$ donc, par (ii), $-u \to +\infty$ donc $u \to -\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété 3

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.*

(ii) *Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.*

Démonstration

(i) Si $\lambda = 0$, c'est immédiat. Sinon, soit $\varepsilon > 0$.
On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_0 = ...$ (à déterminer)
Alors si $n \geqslant N$, $|\lambda u_n - \lambda \ell| = |\lambda|\,|u_n - \ell| \leqslant |\lambda|\varepsilon_0 = \varepsilon$ en choisissant $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$.

(ii) On a $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$.
Alors si $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M|u_n| \to 0$ d'après (i), donc $u_n v_n \to 0$.

(iii) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A_0 = ...$ (à déterminer)
On a $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant m$.
Alors si $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant A_0 + m = A$ en prenant $A_0 = A - m \in \mathbb{R}$. ■

Propriété 4 : Limite de somme et produit

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \to \ell_1 + \ell_2$
- $uv \to \ell_1 \ell_2$

Remarque

R 1 – Dans les cas douteux, il peut se passer tout et n'importe quoi.
Par exemple, pour $0 \times (+\infty)$:

- $\dfrac{1}{n} \times n^2 \to +\infty$
- $\dfrac{-1}{n} \times n^2 \to -\infty$
- $\dfrac{\alpha}{n} \times n \to \alpha$
- $\left(\dfrac{(-1)^n}{n} \times n\right)$ n'a pas de limite.

Démonstration

- **Cas fini**

  ⋆ **Si $u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$:**

  Soit $\varepsilon > 0$. On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ et si $n \geqslant N_2$, $|1_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$,

  Alors si $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et si $n \geqslant N$,

  $$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \underset{\text{IT}}{\leqslant} |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

  ⋆ **Si $u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$:**

  $$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| = |(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)|$$
  $$\underset{\text{IT}}{\leqslant} \underbrace{\underbrace{|u_n - \ell_1|}_{\longrightarrow 0} \quad \underbrace{|v_n|}_{\text{CV donc bornée}}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\underbrace{|v_n - \ell_2|}_{\longrightarrow 0} \ \underbrace{|\ell_1|}_{\text{borné}}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$$

  en utilisant la somme des limites. Donc $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$.

- **Cas infini**
  - ⋆ **Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$:**

    u est minorée et $v \to +\infty$.
  - ⋆ **Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$:**

    $-u \to -\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $-v \to +\infty$, donc $-u - v \to +\infty$.
  - ⋆ **Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$:**

    Soit $m > 0$ tel que $m < \ell$ (par exemple $\frac{\ell}{2}$ si ℓ est finie, 1 sinon).

    On a $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geqslant N_1$, $u_n \geqslant m > 0$.

    Soit $A \geqslant 0$. On a $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, $v_n \geqslant A_0 = \dfrac{A}{m}$.

    Alors si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $u_n v_n \geqslant m\dfrac{A}{m} = A$.
  - ⋆ **Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$:**

    $-u \to -\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $-v \to +\infty$, donc $uv = (-u)(-v) \to +\infty$.
  - ⋆ **Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \to -\infty$:**

    $-u \to -\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v \to +\infty$, donc $-uv = (-u)v \to +\infty$.
  - ⋆ **Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n v_n \to -\infty$:**

    $u \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $-v \to +\infty$, donc $-uv = u(-v) \to +\infty$.

Propriété 5 : Limite d'inverse

- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et* $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors* $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n < 0$, alors* $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$.

Démonstration

- Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$, $|u_n| \to |\ell| > \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ donc on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| > \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ et en particulier $u_n \neq 0$.
  Si $n \geqslant N$,
  $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{2}{|\ell|^2}|u_n - \ell| \longrightarrow 0$$
  donc $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $u_n \to +\infty$ et $\varepsilon > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Alors $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.
- Si $u_n \to -\infty$, $-u \to +\infty$ et $\dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{-u} \to 0$.
- Si $u_n \to 0^+$ et $A > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| = u_n \leqslant \dfrac{1}{A}$ donc $\dfrac{1}{u_n} \geqslant A$.
- Si $u_n \to 0^-$, $-u \to 0^+$ et $\dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{-u} \to -\infty$.

Propriété 6 : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.
- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.*

- *Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

Démonstration

- Si $q = 1$, ok.
- Si $|q| < 1$, $|q^n| = |q|^n = \mathrm{e}^{n \ln |q|} \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n = \mathrm{e}^{n \ln q} \to +\infty$.
- Si $q < -1$, $q^{2k} \to +\infty$ et $q^{2k+1} \to -\infty$ donc (q^n) n'est ni majorée, ni minorée. En particulier, elle n'a pas de limite. ∎

Démonstration

- Si $\ell < 1$, soit q tel que $\ell < q < 1$. À partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ donc $u_{n+1} \leqslant q u_n$. Alors, par récurrence, si $n \geqslant n_0$, $0 < u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0} \longrightarrow 0$. Donc $u \to 0$.
- Si $\ell > 1$, soit q tel que $1 < q < \ell$. À partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ donc $u_{n+1} \geqslant q u_n$. Alors, par récurrence, si $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant q^{n-n_0} u_{n_0} \longrightarrow +\infty$. Donc $u \to +\infty$.
- $\dfrac{n+1}{n} \to 1$ et $n \to +\infty$. $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \to 1$ et $\frac{1}{n} \to 0$. ∎

II Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) *Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$).*

(ii) *Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).*

Démonstration

Soit $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Alors $E \neq \varnothing$. On suppose u croissante (si u est décroissante, il suffit d'appliquer les résultats à $-u$ qui est croissante.)

(i) Si u est majorée, $\ell = \sup u_n = \sup E$ existe. Soit $\varepsilon > 0$.
Par caractérisation de la borne supérieure, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_N$ ($\ell - \varepsilon$ ne majore pas u).
Alors par croissance de u,
$$\forall n \geqslant N,\ \ \ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant \sup u_n = \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$
donc $\forall n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Finalement, $u_n \to \ell$.

(ii) Si u non majorée, soit $A \in \mathbb{R}$. A ne majore par u donc on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$.
Par croissance de u, $\forall n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A$ donc $u \to +\infty$. ∎

Corollaire 1

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).

De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

Démonstration

$\lim u = \sup u$ (respectivement $\inf u$.)
Si u croit strictement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \leqslant \lim u$.

2 Suites adjacentes

Définition 2 : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Exemple

E 1 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

E 2 – Si $x \in \mathbb{R}$, les suites d'approximation décimale par défaut et par excès $(d_n(x))$ et $(D_n(x))$ sont adjacentes.

Propriété 7

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Démonstration

Soit $w_n = v_n - u_n$. Alors par opérations, w est décroissante et $w_n \to 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant v_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ donc u est croissante majorée par v_0 et v est décroissante minorée par u_0 et donc ces suites convergent. Comme $v_n - u_n \to 0$, les limites sont égales et l'encadrement découle des propriétés des suites monotones.

Remarque

R 2 – On a alors pour tout n, $|u_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n| = v_n - u_n$ ce qui donne des information intéressante sur la **vitesse de convergence** : plus $v - u$ converge rapidement vers 0, plus u converge rapidement vers ℓ.
Cela permet aussi de connaître un rang à partir duquel u_n est une approximation de ℓ à une précision donnée.

Exemple

E 3 – Approximations décimales :

$$|d_n(x) - x| \leqslant D_n(x) - d_n(x) = 10^{-n}$$

Convergence très rapide (au moins exponentielle).
Si on veut n décimales, on calcule $d_n(x)$ (évidemment !).

E 4 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Vu le calcul précédent, pour tout n, $\left| S_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leqslant \frac{1}{n}$. La converge est (au moins) en $\frac{1}{n}$ donc plutôt lente.
Si on veut n décimales, on calcule... S_{10^n} !

E 5 – **Dichotomie** : On construit des segments emboîtes en divisant leur taille par 2 à chaque étape : $I_0 = [a, b]$, pour tout n, $I_{n+1} \subset I_n$ avec $\ell(I_{n+1}) = \frac{\ell(I_n)}{2}$, avec $I_n = [a_n, b_n]$.

Alors $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et la convergence de (a_n) et (b_n) vers ℓ est au moins en $\dfrac{b-a}{2^n}$ donc très rapide.

III Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété 8 : Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \beta \end{cases}$$

Démonstration

Voir chapitre précédent. ■

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Définition 3 : Partie dense dans $\mathbb{R}$

Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \varnothing$.

Remarque

R 3 – La définition sera étendue plus tard dans l'année.

Propriété 9 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

- ($\Rightarrow$) : Si $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \in A$ tel que $x - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant x + \frac{1}{n}$ car A est dense dans $\mathbb{R}$. Alors, par encadrement, $a_n \to x$.
- ($\Leftarrow$) : Si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A, et si $x < y$. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to \frac{x+y}{2}$. Avec $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$, on a un rang à partir duquel

$$x = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} < a_n < \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} = y$$

avec $a_n \in A$. Donc A est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Corollaire 2 : Cas des réels et des décimaux

(i) *Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.*

(ii) $\mathbb{D}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration

(ii) : il suffit de prendre une suite d'approximations décimales. ∎

IV Extension aux suites complexes

Notation 1 : Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'une suite complexe

Soit $z=(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{Re}(z)=(\mathfrak{Re}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{Im}(z)=(\mathfrak{Im}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{z}=\left(\overline{z_n}\right)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $|z|=(|z_n|)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 4 : Convergence de suite complexe

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell\in\mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n-\ell|\to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ |z_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Remarque

R4 – Pas de limite infinie dans $\mathbb{C}$. On peut au mieux avoir $|z_n|\to+\infty$.

Propriété 10

Soit $(z_n)\in\mathbb{C}^n$ *et* $\ell\in\mathbb{C}$.

$$z_n\to\ell\iff\mathfrak{Re}\,z_n\to\mathfrak{Re}\,\ell\text{ et }\mathfrak{Im}\,z_n\to\mathfrak{Im}\,\ell$$

Démonstration

(i)
- $|\mathfrak{Re}\,z_n-\mathfrak{Re}\,\ell|=|\mathfrak{Re}(z_n-\ell)|\leqslant|z_n-\ell|$
- $|\mathfrak{Im}\,z_n-\mathfrak{Im}\,\ell|=|\mathfrak{Im}(z_n-\ell)|\leqslant|z_n-\ell|$
- $|z_n-\ell|=\sqrt{(\mathfrak{Re}\,z_n-\mathfrak{Re}\,\ell)^2+(\mathfrak{Im}\,z_n-\mathfrak{Im}\,\ell)^2}$

(ii) $||z_n|-|\ell||\leqslant|z_n-\ell|$ □

Définition 5

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ |z_n|\leqslant M$.

Démonstration

Si $z_n\to\ell$, alors $|z_n|\to|\ell|$ donc la suite réelle $(|z_n|)$ est bornée donc par définition (z_n) l'est aussi. ∎

Propriété 11 : Suites géométriques complexes

Soit $q\in\mathbb{C}$.
- *Si* $q=1$, $q^n\to1$.
- *Si* $\left|q\right|<1$, $q^n\to0$.
- *Si* $\left|q\right|>1$, (q^n) *n'est pas bornée et donc diverge.*

- *Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.*

Démonstration

- Si $q = 1$: ok
- Si $|q| < 1$, $|q^n - 0| = |q|^n \to 0$ donc $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, $|q^n| = |q|^n \to +\infty$ donc (q^n) est non bornée et diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, on a $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $q = e^{i\theta}$. Alors $|q^n| = 1$ donc la suite est bornée (on reste sur le cercle trigonométrique) et si $q^n = e^{in\theta} \to \ell$, alors $|q^n| = 1 \to |\ell| = 1$ par unicité de la limite. En particulier $\ell \neq 0$ et $q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n} \to \dfrac{\ell}{\ell} = 1$ ce qui est contradictoire. ∎

Remarque

R5 – En particulier, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ divergent. En effet, si l'une convergeait, à l'aide de $\cos((n+1)\theta)$ ou $\sin((n+1)\theta)$, on obtient que l'autre converge aussi et alors $\left(e^{in\theta}\right)$ convergerait également.

Démonstration

Si (z_n) est bornée, alors soit $(x_n) = (\mathfrak{Re}\, z_n)$ et $(y_n) = (\mathfrak{Im}\, z_n)$. Ces deux suites sont bornées. Par le théorème réel, on peut extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de x. Puis $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ est bornée en tant que suite extraite d'une suite bornée, on peut donc en extraire une suite convergente : $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$. Alors par extraction, $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ est également convergente et donc $\left(z_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ converge. ∎

V Suites récurrentes

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \to \mathbb{R}$.

Propriété 12

Si $u_n \to \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Démonstration

Unicité de la limite avec $u_{n+1} \to \ell$ et $f(u_n) \to f(\ell)$. ∎

Méthode 1 : Étude générique de suite récurrente

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous !
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** f : I tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \in I$.
  Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.

- ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
  (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$

  et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

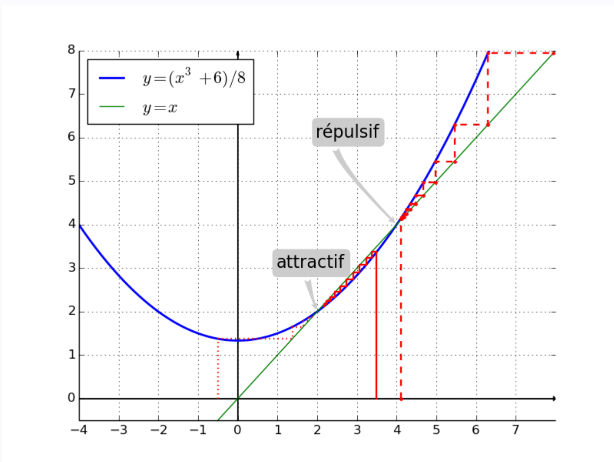
$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$

- ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
  Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

Exercice 1

Étude de (u_n) telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+8}{6}$. On pose donc $f(x) = \dfrac{x^2+8}{6}$ et $g(x) = f(x) - x = \dfrac{x^2-6x+8}{6} = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6}$. En particulier, les points fixes de f sont 2 et 4. f est paire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \frac{x}{3}$. Les suites (u_n) sont toujours définies sans problème.

x	$-\infty$		-4		-2		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↘	2	↘	$\frac{4}{3}$	↗	2	↗	4	↗	$+\infty$
$g(x)$					$+$				0	$-$	0		$+$



Intervalles stables intéressants : $[0,2[$, $]2,4[$ et $]4,+\infty[$.

- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-2,2[,}$ $u_1 \in [0,2[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1$, $u_n \in [0,2[$.
  Si $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$, donc $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n \geqslant 0}$ strictement croissante.
  Comme (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers $\ell \in [0,2]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f, donc $\ell = 2$.
  $\boxed{u_n \to 2 \text{ en croissant strictement.}}$
- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-4,-2[\cup]2,4[,}$ $u_1 \in]2,4[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1$, $u_n \in]2,4[$.
  Si $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$, donc $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante.
  Comme $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 2, elle converge vers $\ell \in [2,4]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Comme on a $\ell \leqslant u_1 < 4$, $\ell = 2$.
  $\boxed{u_n \to 2 \text{ en décroissant strictement au moins à partir du rang 1.}}$
- $\boxed{\text{Si } u_0 \in]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[,}$ $u_1 \in]4,+\infty[$ stable par f, donc $\forall\, n \geqslant 1$, $u_n \in]4,+\infty[$.
  Si $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$, donc $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n \geqslant 0}$ strictement croissante.

Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. Comme $\ell \in [4, +\infty[$, $\ell = 4$. Or $4 < u_1 \leqslant \ell$ ce qui est contradictoire.
Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et non convergente, $u_n \to +\infty$.
$\boxed{u_n \to +\infty \text{ en croissant strictement.}}$

- Si $\boxed{u_0 \in \{-2, 2\}, \forall\, n \geqslant 1,\quad u_n = 2.}$
- Si $\boxed{u_0 \in \{-4, 4\}, \forall\, n \geqslant 1,\quad u_n = 4.}$

2 Cas d'une fonction contractante

Définition 6 : Fonction contractante

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall\, x, x' \in I,\quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».

Méthode 2 : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell \in I$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in I$ stable par f, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = \left|f(u_{n-1}) - f(\ell)\right| \leqslant k\,|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \to 0$$

Donc directement $u_n \to \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 3 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 *On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in \mathring{I},\quad \left|f'(t)\right| \leqslant k$.*

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall\, x, x' \in [a, b],\quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|.$$

Démonstration

Admis provisoirement. ∎

Remarque

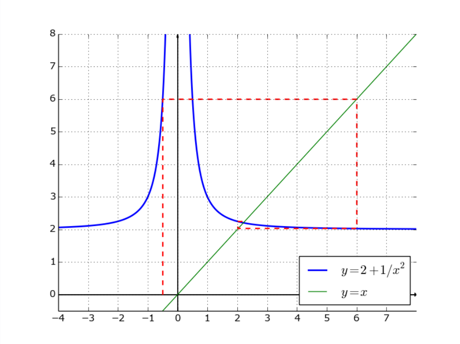
R6 – On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f de classe $\mathscr{C}^1$, alors
- si $\left|f'(\ell)\right| < 1$, le point fixe est **attractif**, en particulier si $f'(\ell) = 0$ (point **superattractif**), la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton,
- si $\left|f'(\ell)\right| > 1$, le point fixe est **répulsif**,
- si $\left|f'(\ell)\right| = 1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exemple

$u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$.

Par récurrence, (u_n) est définie et $u_n > 2$ à partir du rang 1.
$f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$[2,+\infty[$ est stable par f et comme $u_1 \in [2,+\infty[$, $\forall\, n \geqslant 1,\quad u_n \in [2,+\infty[$.



$f(x) = x \iff x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ et une rapide étude de fonction montre, à l'aide du théorème de la bijection, qu'il y a un unique point fixe $\alpha \in [2,+\infty[$ pour f.

f est continue sur $[2,+\infty[$, dérivable sur $]2,+\infty[$ et si $x > 2$, $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4} (< 1)$.
D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall\, x, x' \in [2,+\infty[,\quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|x - x'\right|.$$

On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|$ donc $\boxed{u_n \to \alpha}$ (plutôt rapidement.)

VI RELATIONS DE COMPARAISON

1 Définition

Définition 7 : Relations de comparaison

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathcal{O}(v)$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$, soit encore $u - v = \mathrm{o}(v)$, c'est-à-dire $u = v + \mathrm{o}(v)$.

Remarque

R 7 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n = v_n \times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\to 0, 1$).

R 8 – ⚠ $u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathcal{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

Exemple

E 6 – $n = \mathrm{o}(n^3)$ et $n^2 = \mathrm{o}(n^3)$ mais $n \neq n^2$!

R 9 – $u = \mathcal{O}(v)$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant K\,|v_n|$.
$u = \mathrm{o}(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$.

R 10 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

R 11 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

Propriété 13 : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$,

$$\ln^{\beta} n \ll n^{\alpha} \ll q^{n} \ll n! \ll n^{n}$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n\ln n \ll n^2$.

Propriété 14

$$u \sim v \iff u = v + \mathrm{o}(v)$$

Démonstration

$$\frac{u_n}{v_n} \to 1 \iff \frac{u_n - v_n}{v_n} \to 0.$$

2 Propriétés

Propriété 15 : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) *Si* $\alpha \neq 0$, $u = \mathrm{o}(\alpha v) \implies u = \mathrm{o}(v)$ *et* $u = \mathcal{O}(\alpha v) \implies u = \mathcal{O}(v)$.

(ii) $u = \mathrm{o}(1) \iff u \to 0$ *et* $u = \mathcal{O}(1) \iff u$ *bornée.*

(iii) *Si* $u = \mathrm{o}(v)$ *ou* $u \sim v$, *alors* $u = \mathcal{O}(v)$ *et la réciproque est fausse.*

(iv) ***Transitivité***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \implies u = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies u = \mathcal{O}(w)$$

(v) ***Combinaison linéaire***

$$u = \mathrm{o}(w) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathcal{O}(w) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathcal{O}(w)$$

(vi) ***Produit***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } a = \mathrm{o}(b) \implies ua = \mathrm{o}(vb)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } a = \mathcal{O}(b) \implies ua = \mathcal{O}(vb)$$

Démonstration

Toutes ces propriétés se démontrent facilement en passant par le quotient qui doit être bornée/$\to 0$.

Propriété 16 : Propriétés de ∼

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

(ii) *Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.*

(iii) $u \to \ell\ \boxed{\neq 0} \iff u \sim \ell$.

(iv) *Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

(v) *Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\dfrac{u}{a} \sim \dfrac{v}{b}$.*

(vi) *Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.*

(vii) *Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

Remarque

R 12 – ⚠ $u_n \sim v_n \not\Leftrightarrow u_n - v_n \to 0$

R 13 – ⚠ Si α n'est pas fixe : $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$ donc $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R 14 – ⚠ On n'ajoute pas les équivalents.

R 15 – ⚠ Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé ! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)
Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.
En particulier, si $u_n \to 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R 16 – ⚠ On ne compose pas des équivalents par la gauche avec des fonctions, même continues.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

- $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n} \iff u_n - v_n \to 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1,}$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 2 : Intégrales de Wallis : Très classique !

Détermination d'un équivalent de l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

- Relation de récurrence,
- Expression de I_n
- Décroissance,
- $I_n \sim I_{n-1}$,
- nI_nI_{n-1} constant,
- Équivalent de I_n.

3 Équivalents usuels

Propriété 17 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Démonstration

Admis provisoirement. Les séries permettent de montrer que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ et les intégrales de Wallis permettent de voir que $K = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 3

Équivalent de $u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Propriété 18 : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \to 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $\mathrm{e}^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\mathrm{Arctan}\, h_n \sim h_n$
- $\mathrm{Arcsin}\, h_n \sim h_n$
- $\mathrm{sh}\, h_n \sim h_n$
- $\mathrm{th}\, h_n \sim h_n$

Démonstration

Conséquences de la propriété précédente.
$\cos x - 1 = -2\sin^2 \frac{x}{2}$.

Remarque

R 17 – Lorsque l'on est au voisinage de a, on se ramène en général au voisinage de 0 en posant $x = a + h$ si a est fini et $x = \frac{1}{h}$ si a est infini.

Exercice 4

Limite de $u_n = n\left(\left(1 - \sin\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$.

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition 8 : Développement asymptotique

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(r)} + \mathrm{o}\left(v_n^{(r)}\right)$$

où $v^{(1)}, \dots, v^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \cdots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in [\![1, r-1]\!],\ v_n^{(k+1)} = \mathrm{o}\left(v_n^{(k)}\right)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $v_n^{(r)}$.

Remarque

R 18 – On a toujours que $u_n - v_n^{(1)} - \cdots - v_n^{(r)} \sim v_n^{(k+1)}$. C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

R 19 – On peut adapter la définition précédente pour des fonctions au voisinage d'un point : c'est une généralisation du développement limité.

Méthode 3 : Calcul de développement asymptotique

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + \mathrm{o}(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

Exercice 5

Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : n \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{n^2+2n+4}}$ à la précision $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n}$.

$$\mathrm{e}^{\sqrt{n^2+2n+4}} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^n + \frac{3\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^n}{n}\right)$$

Exercice 6

Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x}. Asymptote ?

$$\ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x} + \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-4x}\right)$$

$y = x - \ln 2$ asymptote et la courbe est au-dessus.

Exercice 7

Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

$$x^{1+\frac{1}{x}} = x\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = x\left(1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)\right) = x + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)$$

avec $\dfrac{\ln^2 x}{2x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $y = x + \ln x$ est asymptote et la courbe est au-dessus.

Exercice 8

On s'intéresse à u_n unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{e^x}{n}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, majorée par -1 et croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).

VII Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition 9 : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété 19

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition 10 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $\mathbb{K}$) de suite extraite de u.

Exemple

E 7 – Valeurs d'adhérence de $(-1)^n$.

Propriété 20

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Remarque

R 20 – Réciproque fausse.

Exemple

E 8 – $u_n = n$ si n est pair et 0 sinon.

Corollaire 3

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété 21

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème 4 : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

VIII Exercices CCINP

Exercice 9

CCINP 1 et 43.