2 Programmation dynamique

Extrait du programme officiel :

Notions	Commentaires
Programmation dynamique. Propriété de sous-structure optimale. Chevauchement de sous-problèmes. Calcul de bas en haut ou par mémoïsation. Reconstruction d'une solution optimale à partir de l'information calculée.	La mémoïsation peut être implémentée à l'aide d'un dictionnaire. On souligne les enjeux de complexité en mémoire. Exemples : partition équilibrée d'un tableau d'entiers positifs, ordonnancement de tâches pondérées, plus longue sous-suite commune, distance d'édition (Levenshtein), distances dans un graphe (Floyd-Warshall).

Mise en œuvre
Les exemples proposés ne forment une liste ni limitative ni impérative. Les cas les plus complexes de situations où la programmation dynamique peut être utilisée sont guidés. On met en rapport le statut de la propriété de sous-structure optimale en programmation dynamique avec sa situation en stratégie gloutonne vue en première année.

CC BY NC SA

Table des matières

2 Programmation dynamique 1
I Un premier exemple : calcul de cœfficients binomiaux 2
1 Récursif et naïf 2
2 Une solution bien meilleure 4
3 Garder en mémoire les résultats en les tabulant, de bas en haut (itératif) 4
4 La magie de la mémoïsation, de haut en bas (récursif) 5
II Quelques définitions 5
III Un deuxième exemple : le rendu de monnaie 6
1 Le problème 6
2 Méthode gloutonne 6
3 Sous-problèmes et équation de Bellmann 7
4 Calcul du coût (nombre de pièces) minimal 7
5 Détermination d'une solution minimale 8
IV Un troisième exemple : la distance d'édition 9

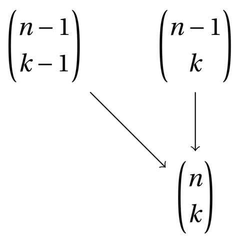
I Un premier exemple : calcul de cœfficients binomiaux

1 Récursif et naïf

Une solution naïve pour calculer le cœfficient binomial $\binom{n}{k}$ consiste à utiliser une fonction récursive mettant en application la formule du triangle de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Schéma de dépendance :



Cela donne la fonction naïve :

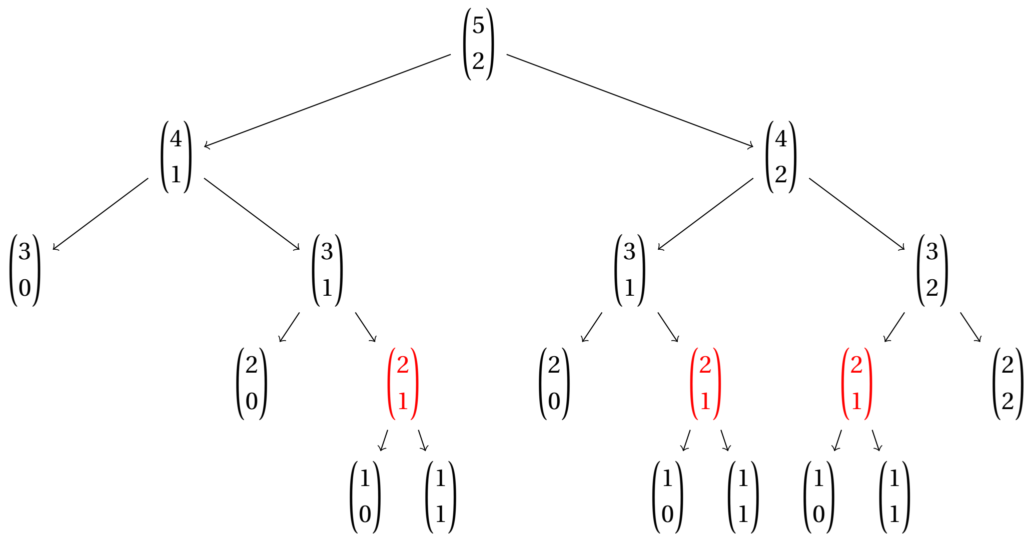
```python
def binom(k, n):
    print(f'Calcul de {k} parmi {n}')
    if k < 0 or k > n:
        return 0
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    return binom(k - 1, n - 1) + binom(k, n - 1)
```

Cela pose un problème important : nombre de cœfficients binomiaux sont calculés plusieurs fois.

Par exemple, pour calculer $\binom{5}{2}$:

```python
>>> binom(2, 5)
Calcul de 2 parmi 5
Calcul de 1 parmi 4
Calcul de 0 parmi 3
Calcul de 1 parmi 3
Calcul de 0 parmi 2
Calcul de 1 parmi 2
Calcul de 0 parmi 1
Calcul de 1 parmi 1
Calcul de 2 parmi 4
Calcul de 1 parmi 3
Calcul de 0 parmi 2
Calcul de 1 parmi 2
Calcul de 0 parmi 1
Calcul de 1 parmi 1
Calcul de 2 parmi 3
Calcul de 1 parmi 2
Calcul de 0 parmi 1
Calcul de 1 parmi 1
Calcul de 2 parmi 2
10
```

Ce qui se résume bien sur l'arbre suivant :



Pour le vérifier formellement, on s'intéresse à la complexité temporelle (par exemple en nombre d'additions), qui vérifie alors

$$\begin{cases} T(k,n) = 0 & \text{si } k \leqslant 0 \text{ ou } k \geqslant n \\ T(k,n) = T(k-1,n-1) + T(k,n-1) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une récurrence de la même forme que celle de $\binom{n}{k}$, on cherche a et b tels que $T(k,n) = a\binom{n}{k} + b$ et

CC BY NC SA

on trouve que $T(k,n) = \binom{n}{k} - 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Pour un n donné, la valeur maximale est $T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n\right)$ et la formule de Stirling nous donne du $\mathcal{O}\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$. Violent !

2 Une solution bien meilleure

Une meilleure idée serait d'utiliser les formules $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$:

Python
```python
def binom(k, n):
    if k < 0 or k > n:
        return 0
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    if n - k < k:
        return binom(n - k, n)
    return (n * binom(k - 1, n - 1)) // k
    # Attention : surtout pas de n / k !
```

avec une complexité linéaire cette fois, mais sans la formule du triangle de Pascal.

3 Garder en mémoire les résultats en les tabulant, de bas en haut (itératif)

On peut aussi mémoriser les valeurs calculées, en calculant les lignes du triangle de Pascal les unes après les autres.

En voici une première version, itérative, en stockant le triangle de Pascal dans un tableau à deux dimensions (on parle d'approche **de bas à haut** ou *bottom-up*).

Python
```python
def binom(k, n):
    if k < 0 or k > n:
        return 0
    bin = [[0 for _ in range(k + 1)] for _ in range(n + 1)]
    bin[0][0] = 1
    for i in range(1, n + 1): # remplissage de la ligne i
        bin[i][0] = 1
        for j in range(1, k + 1):
            bin[i][j] = bin[i - 1][j - 1] + bin[i - 1][j]
    return bin[n][k]
```

Cette fois, nous avons une complexité temporelle en $\mathcal{O}(nk)$ et une complexité spatiale en $\mathcal{O}(nk)$ également.

On remarque que l'on peut faire mieux car chaque ligne est déduite uniquement de la précédente. D'où la version suivante avec seulement un tableau linéaire.

Python
```python
def binom(k, n):
    if k < 0 or k > n:
        return 0
    bin = [0 for _ in range(k + 1)]
    bin[0] = 1
    for _ in range(n): # remplissage de la ligne i
        for j in range(k, 0, -1): # modification de droite à gauche
            bin[j] = bin[j - 1] + bin[j]
    return bin[k]
```

Cette fois, nous avons une complexité temporelle en $\mathcal{O}(nk)$ et une complexité spatiale en $\mathcal{O}(k)$ seulement.

4 La magie de la mémoïsation, de haut en bas (récursif)

Mais on remarque que beaucoup de cœfficients binomiaux sont encore calculés inutilement. Pour ne calculer que les cœfficients binomiaux utiles, nous pouvons changer d'approche, avec une approche dite **de haut en bas** (ou *top-bottom*), programmée récursivement en utilisant un dictionnaire comme variable globale. C'est la **mémoïsation**.

Python
```python
dico = {}
def binom(k, n):
    if (k, n) not in dico:
        if k < 0 or k > n:
            resultat = 0
        elif k == 0 or k == n:
            resultat = 1
        else:
            resultat = binom(k - 1, n - 1) + binom(k, n - 1)
        dico[(k, n)] = resultat
    return dico[(k, n)]
```

ce qui donne

Python
```python
>>> binom(2, 5)
10
>>> dico
{(0, 3): 1, (0, 2): 1, (0, 1): 1, (1, 1): 1, (1, 2): 2, (1, 3): 3,
 (1, 4): 4, (2, 2): 1, (2, 3): 3, (2, 4): 6, (2, 5): 10}
```

Cette fois, seuls les cœfficients binomiaux nécessaires ont été calculés. Le nombre d'addition devient $\mathcal{O}(n)$ et la complexité spatiale (taille du dictionnaire) également.

Remarque 1 : C'est déjà prévu par `Python` !

Il se trouve que la mémoïsation des fonctions récursives existe nativement dans `Python`.
On l'obtient de façon automatique, avec la fonction de départ, en utilisant

Python
```python
from functools import lru_cache

@lru_cache
def binom(k, n):
    if k < 0 or k > n:
        return 0
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    return binom(k - 1, n - 1) + binom(k, n - 1)
```

Il va sans dire que ce n'est pas ce qui sera attendu le jour du concours !

II Quelques définitions

La **programmation dynamique** que l'on est en train de mettre en place consiste, pour résoudre un problème, à résoudre des **sous-problèmes** de taille inférieure qui ne sont **pas indépendant**.

Il ne faut pas la confondre avec la méthode « diviser pour régner » (utilisée pour les tris rapide et fusion par exemple), pour laquelle les sous-problèmes sont indépendants les uns des autres.

La solution de la **mémoïsation** permet de résoudre ces dépendances.

La programmation dynamique est fréquemment employée pour résoudre des **problèmes d'optimisation** : elle s'applique lorsque la solution optimale peut être déduite des solutions optimales des sous-problèmes.

Exemple 1

Recherche de plus court chemin, rendu de monnaie, etc.

CC BY NC SA

Définition 1 : sous-structure

Une **sous-structure** est une restriction de notre problème à un ensemble plus petit.

Définition 2 : propriété de sous-structure optimale

Un problème vérifie la propriété de **sous-structure optimale** si la solution optimale de tout sous-problème est une partie de la solution optimale du problème de départ.

Définition 3 : programmation dynamique

Les méthodes de **programmation dynamique** sont mises en œuvre lorsque le problème étudié possède une propriété de sous-structure optimale, et lorsque les sous-problèmes utilisés pour le résoudre se chevauchent.

Définition 4 : équation de Bellman

Lorsque l'on arrive à décomposer notre problème en plusieurs sous-problèmes plus simples, la relation liant la solution optimale de notre problème à celles des sous-problème est appelée **équation de Bellman.**

Les méthodes de programmation dynamique garantissent d'obtenir la meilleure solution au problème étudié, mais dans un certain nombre de cas, la complexité temporelle reste trop importante pour pouvoir être utilisée dans la pratique.

Dans ce type de situation, on se résout à utiliser un autre paradigme de programmation, la programmation gloutonne.

Alors que la programmation dynamique se caractérise par la résolution par taille croissante de tous les problèmes locaux, la stratégie gloutonne consiste à choisir à partir du problème global un problème local et un seul en suivant une heuristique (c'est-à-dire une stratégie permettant de faire un choix rapide mais pas nécessairement optimal). En général, on ne peut pas garantir que la stratégie gloutonne détermine la solution optimale, mais lorsque l'heuristique est bien choisie on peut espérer obtenir une solution proche de celle-ci.

III Un deuxième exemple : le rendu de monnaie

1 Le problème

Soit $S \in \mathbb{N}$ une somme à former à l'aide de pièces $P = (p_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ (par exemple, pour les euros comptés en centimes, $(200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1)$.)

L'objectif est de former la somme S à l'aide des valeurs de P en utilisant un minimum de pièces.

Si on note m_i le nombre de pièces de valeur p_i, alors le problème consiste à minimiser le nombre total de pièces $\sum_{i=0}^{n-1} m_i$ tout en ayant $S = \sum_{i=0}^{n-1} m_i p_i$.

2 Méthode gloutonne

La méthode gloutonne consiste à rendre un nombre maximal de pièce par ordre décroissant de valeurs de pièces.

Python
```python
def rendu_monnaie_glouton(Somme, Pieces):
    # tri des pièces par ordre décroissant
    Pieces_triees = sorted(Pieces, reverse=True)
    rendu = {}
    somme_restante = Somme
    for piece in Pieces_triees:
        # Calcul simultané du quotient et du reste de division euclidienne
        rendu[piece], somme_restante = divmod(somme_restante, piece)
     return rendu
```

La stratégie gloutonne n'est pas optimale pour certains systèmes de pièces (dits non canonique) : par exemple, pour rendre 6 avec un système $(1,3,4)$, l'algorithme glouton rend 3 pièces (une de 4 et deux de 1) alors que l'optimal est à deux pièce de 4.

3 Sous-problèmes et équation de Bellmann

Les sous-problèmes considérés ici sont des problèmes du même type mais n'utilisant que les pièces $P_k = (p_i)_{0\leqslant i\leqslant k-1}$ pour atteindre une somme $s \leqslant S$.

Notons $c_k(s)$ le nombre minimal de pièces de valeurs parmi $P_k = (p_0,\ldots,p_{k-1})$ nécessaire pour former la somme s.

On cherche donc à calculer $c_n(S)$.

Comment déterminer $c_k(s)$? Il est possible de rendre m pièces de valeur p_{k-1} avec $mp_{k-1} \leqslant s$.
Il faut alors avoir un minimum de pièces parmi $(p_0,\ldots,p_{k-2})$ pour former la somme $s - mp_{k-1}$, et ajouter à ce nombre les m pièces de valeur p_{k-1}.

D'où la formule de récurrence (équation de Bellmann) :

$$c_k(s) = \min_{m\in\mathbb{N} \mid mp_{k-1}\leqslant s} \left(c_{k-1}(s - mp_{k-1}) + m\right)$$

Ajoutons les conditions aux limites (conditions d'arrêt) :

- $c_k(0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ (aucune pièce pour rendre 0) ;
- $c_0(s) = +\infty$ pour tout $s > 0$ (pas de rendu possible si aucune pièce, ne devrait pas se rencontrer, si la pièce minimale vaut 1).

Nous pouvons utiliser `float('inf')` pour simuler $+\infty$.

Le plus difficile est fait.

L'implémentation va se faire par mémoïsation (récursivité, de haut en bas), bien adaptée ici. On aurait aussi pu utiliser une méthode tabulaire, de bas en haut.

4 Calcul du coût (nombre de pièces) minimal

Python

```python
def nb_pieces_rendues(Somme, Pieces)
    """nombre minimal de pièces nécessaires pour rendre Somme à l'aide du système Pieces."""

    dico = {} # Dictionnaire pour la mémoïsation

    def c(k, s):
        """nombre minimal de pièces pour obtenir s avec Pieces[:k]"""
        if (k, s) not in dico:
            if s == 0:
                resultat = 0
            elif k == 0:
                resultat = float('inf')
            else:
                liste = [c(k - 1, s - m * Pieces[k-1]) + m for m in range(s // Pieces[k-1] + 1)]
                resultat = min(liste)
            dico[(k, s)] = resultat
        return dico[(k, s)]

    return c(len(Pieces), Somme)
```

Ce n'est pas pleinement satisfaisant dans le sens où nous avons le nombre minimal de pièces, mais nous n'avons pas la distribution desdites pièces. Nous allons y remédier.

5 Détermination d'une solution minimale

Pour pouvoir déterminer un distribution de pièces réalisant le minimum, l'idée est de garder en mémoire les distributions réalisant les minima à chaque étape en plus des nombres de pièces.

Donnons-nous une fonction renvoyant un indice du minimum d'une liste.

Python
```python
def indice_min(liste):
    """renvoie un indice du minimum de liste."""
    n = len(liste)
    ind_min = 0
    for i in range(1, n):
        if liste[i] < liste[ind_min]:
            ind_min = i
    return ind_min
```

Une fois que l'on aura rempli un dictionnaire avec des couples $(min, indice_min)$, il faudra retrouver la solution optimale en partant de la dernière pièce et en remontant à la première (rétropropagation).

Python
```python
def nb_pieces_rendues(Somme, Pieces):
    """distribution de pièces réalisant le nombre minimal de pièces nécessaires pour rendre Somme à
l'aide du système Pieces."""

    dico = {} # Dictionnaire pour la mémoïsation

    def c_et_m(k, s):
        """couple (c(k, s), m) où c(k, s) nombre minimal de pièces pour obtenir s avec Pieces[:k] et
m un nombre de pièces Pieces[k - 1] réalisant ce minimum."""
        if (k, s) not in dico:
            if s == 0:
                resultat = (0, 0)
            elif k == 0:
                resultat = (float('inf'), None) # Ne sert normalement pas
            else:
                liste = [c_et_m(k-1, s - m*Pieces[k-1])[0] + m for m in range(s//Pieces[k-1] + 1)]
                m = indice_min(liste)
                resultat = (liste[m], m)
            dico[(k, s)] = resultat
        return dico[(k, s)]

    n = len(Pieces)
    dico_solution = {} # initialisation de la solution
    # On récupère le nb de dernière pièce et on
    # remplit dico.
    dico_solution[Pieces[-1]] = c_et_m(n, Somme)[1]
    # Après cet appel de c_et_m, le dico est rempli, les autres appels ne sont plus coûteux.

    # rétropropagation
    somme_restante = Somme
    for k in range(n - 1, 0, -1):
        # On enlève autant de la dernière pièce que prévu.
        somme_restante -= Pieces[k] * dico_solution[Pieces[k]]
        # Nombre de pièces précédentes.
        # L'utilisation du dictionnaire celle de la fonction récursive c_et_m sans coût.
        dico_solution[Pieces[k - 1]] = c_et_m(k, somme_restante)[1]

    return dico_solution
```

Une solution alternative consiste à utiliser deux dictionnaires : un pour stocker les $c_k(s)$ comme dans la première fonction et un autre pour stocker les nombres de pièces correspondantes (indices de minima).

```python
def rendu_monnaie(Somme, Pieces):
    """distribution de pièces réalisant le nombre minimal de pièces nécessaires pour rendre Somme à
l'aide du système Pieces."""

    c = {} # Dictionnaire pour la mémoïsation du nombre total de pièces
    m = {} # Dictionnaire pour la mémoïsation du nombre d'une pièce donnée

    def c(k, s):
        """nombre minimal de pièces pour obtenir s avec Pieces[:k]."""
        if (k, s) not in c:
            if s == 0:
                resultat = (0, 0)
            elif k == 0:
                resultat = (float('inf'), None) # Ne sert normalement pas
            else:
                liste = [c(k - 1, s - m * Pieces[k-1]) + m for m in range(s//Pieces[k-1] + 1)]
                imin = indice_min(liste)
                resultat = (liste[imin], imin)
             c[(k, s)], m[(k, s)] = resultat
        return c[(k, s)]

    n = len(Pieces)
    dico_solution = {} # initialisation de la solution
    # On remplit les dictionnaires de mémoïsation (sans récupérer le résultat).
    c(n, Somme)
    dico_solution[Pieces[-1]] = m[(n, Somme)]
    # rétropropagation
    somme_restante = Somme
    for k in range(n - 1, 0, -1):
        # On enlève autant de la dernière pièce que prévu.
        somme_restante -= Pieces[k] * dico_solution[Pieces[k]]
        # Nombre de pièces précédentes.
        dico_solution[Pieces[k - 1]] = m[(k, somme_restante)]

    return dico_solution
```

IV Un troisième exemple : la distance d'édition

La **distance d'édition**, ou **distance de Levenshtein**, est une mesure de la similarité de deux chaînes de caractères : elle est égale au nombre minimal de caractères qu'il faut supprimer, insérer ou remplacer pour passer d'une chaîne de caractères à une autre.

Par exemple, on peut passer du mot `polynomial` au mot `polygonal` en suivant les étapes suivantes :

- suppression de la lettre `i` : `polynomial` $\longrightarrow$ `polynomal` ;
- remplacement du `n` par un `g` : `polynomal` $\longrightarrow$ `polygomal` ;
- remplacement du `m` par un `n` : `polygomal` $\longrightarrow$ `polygonal` ;

donc la distance d'édition entre ces deux mots est égale au plus à 3, et on se convaincra qu'il n'est pas possible de faire mieux.

Nous allons calculer la distance d'édition entre deux mots $a = a_0 a_1 \cdots a_{m-1}$ et $b = b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$ en généralisant le problème, c'est-à-dire en définissant la distance d'édition $\mathrm{d}(i, j)$ entre les mots $a_0 a_1 \cdots a_{i-1}$ et $b_0 b_1 \cdots b_{j-1}$. Ce problème possède la propriété de sous-structure optimale.

Exercice 1

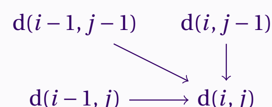
1. En séparant des cas disjoints concernant a_{i-1} et/ou b_{j-1} dans le chemin optimal reliant $a_0 a_1 \cdots a_{i-1}$ et $b_0 b_1 \cdots b_{j-1}$ (insertion, suppression, remplacement éventuel), exprimer dans chaque cas $\mathrm{d}(i,j)$ en fonction de $\mathrm{d}(i-1,j)$, $\mathrm{d}(i,j-1)$, $\mathrm{d}(i-1,j-1)$.
   En déduire que
   $$\mathrm{d}(i,j) = \min\Big(\mathrm{d}(i-1,j)+1,\ \mathrm{d}(i,j-1)+1,\ \mathrm{d}(i-1,j-1)+\delta_{a_{i-1}\neq b_{j-1}}\Big).$$
2. Que valent $\mathrm{d}(i,0)$ et $\mathrm{d}(0,j)$?
3. Écrire deux fonctions permettant de calculer la distance de a à b, l'une par approche tabulaire de bas en haut (avec un tableau puis une simple ligne), l'autre par approche de haut en bas (avec un dictionnaire).
4. Récrire cette dernière pour obtenir le chemin consistant à savoir, si à chaque étape, il a fallu faire une insertion, une suppression, une substitution, ou rien.

Solution

1. Dans un chemin optimal reliant $a_0 a_1 \cdots a_{i-1}$ et $b_0 b_1 \cdots b_{j-1}$, on fait la disjonction de cas :
   - soit on a fait une **suppression** de la lettre a_{i-1} dans le mot de départ, et on compare $a_0 a_1 \cdots a_{i-2}$ et $b_0 b_1 \cdots b_{j-1}$, d'où une distance de $\mathrm{d}(i-1,j)+1$;
   - soit on a fait une **insertion** de la lettre b_{j-1} dans le mot d'arrivée, et on compare $a_0 a_1 \cdots a_{i-1}$ et $b_0 b_1 \cdots b_{j-2}$, d'où une distance de $\mathrm{d}(i,j-1)+1$;
   - soit on s'occupe simultanément des lettres a_{i-1} et b_{i-1} à partir des mots $a_0 a_1 \cdots a_{i-2}$ et $b_0 b_1 \cdots b_{j-2}$ et il faut distinguer deux cas
     - ⋆ soit $a_{i-1} \neq b_{j-1}$ et on aura **remplacé** la lettre a_{i-1} par la lettre b_{j-1}, ce qui correspond à une distance de $\mathrm{d}(i-1,j-1)+1$;
     - ⋆ soit $a_{i-1} = b_{j-1}$ et alors il n'y a **pas d'opération** à faire, ce qui correspond à une distance de $\mathrm{d}(i-1,j-1)\,(+0)$.

   On a donc bien en général $\boxed{\mathrm{d}(i,j) = \min\Big(\mathrm{d}(i-1,j)+1,\ \mathrm{d}(i,j-1)+1,\ \mathrm{d}(i-1,j-1)+\delta_{a_{i-1}\neq b_{j-1}}\Big).}$

   Schéma de dépendance :



2. Pour passer d'un mot de i lettres à un mot vide, il faut au minimum i suppressions, et pour passer d'un mot vide à un mot de j lettres, il faut au minimum j insertions.

   Donc $\boxed{\mathrm{d}(i,0) = i \text{ et } \mathrm{d}(0,j) = j.}$

3. **Version tabulaire de bas en haut avec tableau bidimensionnel**

Python

```python
def distance_edition(a, b):
    "calcule la distance d'édition de la chaîne a à la chaîne b"
    m, n = len(a), len(b)
    # Tableau de format (m + 1) x (n + 1) pour calculer d[m][n]
    d =[[0 for j in range(n + 1)] for i in range(m + 1)]

    for i in range(m + 1): # Initialisation avec question 2
        d[i][0] = i
    for j in range(n + 1):
        d[0][j] = j

    for i in range(1, m + 1): # Remplissage du tableau
        for j in range(1, n + 1):
            if a[i - 1] == b[j - 1]:
                delta = 0
            else:
                delta = 1
            d[i][j] = min(d[i - 1][j] + 1, d[i][j - 1] + 1, d[i - 1][j - 1] + delta)

    return d[m][n]
```

Version tabulaire de bas en haut avec tableau unidimensionnel

Une première version où on recopie la ligne à chaque tour de boucle `i`

Python

```python
def distance_edition(a, b):
    "calcule la distance d'édition de la chaîne a à la chaîne b"
    m, n = len(a), len(b)
    # Tableau-ligne de taille n + 1
    d =[j for j in range(n + 1)]

    for i in range(1, m + 1): # à la fin du tour de boucle, d contient les d_{i, j}
        d1 = d.copy() # contient les d_{i - 1, j}
        d[0] = i # cf question 2
        for j in range(1, n + 1):
            if a[i - 1] == b[j - 1]:
                delta = 0
            else:
                delta = 1
            d[j] = min(d1[j] + 1, d[j - 1] + 1, d1[j - 1] + delta)

    return d[n]
```

Une deuxième version où on ne garde qu'une valeur entière en mémoire

Python

```python
def distance_edition(a, b):
    "calcule la distance d'édition de la chaîne a à la chaîne b"
    m, n = len(a), len(b)
    # Tableau-ligne de taille n + 1
    d =[j for j in range(n + 1)]

    for i in range(1, m + 1): # à la fin du tour de boucle, d contient les d_{i, j}
        d_im1_jm1 = d[0] # contient d_{i-1, j-1}
        d[0] = i # cf question 2
        for j in range(1, n + 1):
            if a[i - 1] == b[j - 1]:
                delta = 0
            else:
                delta = 1
            d_im1_jm1, d[j] = d[j], min(d[j] + 1, d[j - 1] + 1, d_im1_jm1 + delta)

    return d[n]
```

Version de haut en bas avec dictionnaire

Python

```python
def distance_edition(a, b):
    "calcule la distance d'édition de la chaîne a à la chaîne b"
    m, n = len(a), len(b)
    dico = {} # Dictionnaire pour mémoïsation
    def d(i, j):
        if (i, j) not in dico:
            if i == 0:
                resultat = i
            elif j == 0:
                resultat = j
            else:
                if a[i - 1] == b[j - 1]:
                    delta = 0
                else:
                    delta = 1
                resultat = min(d(i-1, j) + 1, d(i, j-1) + 1, d(i-1, j-1) + delta)
            dico[(i, j)] = resultat
        return dico[(i, j)]
    return d(m, n)
```

4.

Python

```python
def distance_edition_et_chemin(a, b):
    "calcule la distance d'édition de la chaîne a à la chaîne b"
    m, n = len(a), len(b)

    dico = {} # Dictionnaire pour mémoïsation
    operation = {} # Dictionnaire pour les opérations.
    # Les valeurs seront des triplets (di, dj, op) tel que le minimum soit atteint en
    # (i + di, j + dj) et op une chaîne de caractère décrivant l'opération associée.

    def d(i, j):
        if (i, j) not in dico:
            if i == 0:
                resultat = i
            elif j == 0:
                resultat = j
            else:
                if a[i - 1] == b[j - 1]:
                    delta = 0
                else:
                    delta = 1
                resultat = min(d(i-1, j) + 1, d(i, j-1) + 1, d(i-1, j-1) + delta)
                if resultat == d(i - 1, j) + 1:
                    oper = (-1, 0, f"suppression de {a[i - 1]}")
                elif resultat == d(i, j - 1) + 1:
                    oper = (0, -1, f"insertion de {b[j - 1]}")
                elif resultat == d(i - 1, j - 1) + delta:
                    if delta == 1:
                        oper = (-1, -1, f"remplacement de {a[i-1]} par {b[j-1]}")
                    else:
                        oper = (-1, -1, f"{a[i - 1]} laissé inchangé")
                dico[(i, j)] = resultat
                operation[(i, j)] = oper
        return dico[(i, j)]

    distance = d(m, n) # remplissage des dictionnaires

    # Retro-propagation

    liste_operations = []

    (i, j) = (m, n)

    while i > 0 and j > 0:
        di, dj, op = operation[(i, j)]
        liste_operations.append(op)
        i += di
        j += dj

    while j > 0: # Lorsque i = 0
        liste_operations.append(f"insertion de {b[j - 1]}")
        j -= 1

    while i > 0: # Lorsque j = 0
        liste_operations.append(f"suppression de {a[i - 1]}")
        i -= 1

    liste_operations.reverse()

    return distance, liste_operations
```