DL 1 – un corrigé

Partie 1 – Étude de la série

1. Soit $k \geqslant 2$, $k^2 > k(k-1) > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} > 0$$

et

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1$$

La série télescopique de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)}$ converge.

Avec le critère de comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

De plus, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $\boxed{\zeta(2) \leqslant 2.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.

   - $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante (strictement).
   - $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} < 0$ donc $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante (strictement).
   - $T_n - S_n = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Ainsi $\boxed{(S_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes et convergent vers une même limite.}}$ Avec la question précédente, cette limite est $\zeta(2)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \zeta(2) \leqslant T_n$ donc $0 \leqslant S_n - \zeta(2) \leqslant \dfrac{1}{n}$

Ainsi $\boxed{S_{10} \leqslant \zeta(2) \leqslant T_{10}}$ est un encadrement à 10^{-1} près de $\zeta(2)$.

3. La fonction $f : t \in [1,+\infty[\to \dfrac{1}{t^2}$ étant décroissante et continue, par comparaison série intégrale, on peut écrire pour $k \in [\![2,n]\!]$,

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis en sommant

$$S_n \leqslant f(1) + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1^2} + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Donc $(S_n)_n$ est majorée et comme la série est à termes positifs, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^2}}$ converge (et on retrouve $\zeta(2) \leqslant 2$).

4. On admet dans cette question que $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Toujours revenir aux sommes partielles pour ne pas risquer de considérer des sommes de séries non convergentes.

- Notons $A_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}$ $A_n=\dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{4}S_n$

  $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{(2n)^2} \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k)^2}=\dfrac{1}{4}\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{24}}$

- Notons $B_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$; $B_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\dfrac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}=S_{2n+1}-A_n$

  $\boxed{(B_n)\text{ converge}}$ comme différence de suites convergentes et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\zeta(2)-\dfrac{1}{4}\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{8}.}$

- Notons $C_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

  $\sum\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|=\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge. Par théorème de convergence absolue, $\boxed{\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\text{ converge.}}$

  $C_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)^2}-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}=B_n-A_n$

  (C_{2n+1}) converge comme différence de suites convergentes et $C_{2n+1}\longrightarrow\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi^2}{24}=\dfrac{\pi^2}{12}$

  (C_n) étant une suite convergente, elle converge vers la limite de chacune de ses suites extraites.

  Ainsi $\boxed{C_n\longrightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{12}.}$

Partie 2 – Calcul par les intégrales de Wallis

1. $\boxed{I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}}$ et $\boxed{J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\mathrm{d}t=\dfrac{\pi^3}{24}}$

---

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\cos^{2n+1}$.

   $\sin$ et $\cos^{2n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. En intégrant par parties en dérivant $\cos^{2n+1}$,

$$I_{n+1}=\left[\sin\cos^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n+1)\sin^2\cos^{2n}=0+(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2)\cos^{2n}=(2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^{2n}-\cos^{2(n+1)}\right)$$

   Il vient $I_{n+1}=(2n+1)(I_n-I_{n+1})$ d'où $\boxed{I_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}I_n.}$

---

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Avec la question précédente, $I_n=\dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}I_0=\dfrac{(2n)!}{[2^n n!]^2}\dfrac{\pi}{2}$ donc $\boxed{I_n=\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}.}$

---

4. Soit $n\geqslant 1$. On effectue une première intégration par parties

$$I_n(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\times\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t=\left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t2n\cos^{2n-1}(t)(-\sin(t))\mathrm{d}t=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\mathrm{d}t$$

puis une seconde intégration par parties :

$$I_n(x) = 2n\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{2}(\cos(t)\cos^{2n-1}(t) - \sin^2(t)(2n-1)\cos^{2n-2}(t))\mathrm{d}t.$$

Par linéarité,

$$I_n(x) = -2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t + 2n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{2}(1-\cos^2(t)\cos^{2n-2}(t))\mathrm{d}t$$

Avec la définition, $J_n(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$ et

$$I_n(x) = -nJ_n(x) + n(2n-1)(J_{n-1}(x) - J_n(x)) = -nJ_n(x) + n(2n-1)J_{n-1}(x) - 2n^2J_n(x) + nJ_n(x)$$

On obtient enfin $\boxed{I_n(x) = n(2n-1)J_{n-1}(x) - 2n^2J_n(x)}$

5. Avec les deux questions précédentes,

$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n.$$

En multipliant par $\dfrac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!}$, on obtient

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!}\cdot\frac{2n(2n-1)}{2}J_{n-1} - \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!}2n^2J_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n$$

Ainsi, $\boxed{K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}.}$

6. Par télescopage, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(K_{j-1} - K_j) = K_0 - K_n$. Avec la question précédente, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\pi}{4j^2} = K_0 - K_n$.

Or $K_0 = J_0$. En factorisant, $\boxed{\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n.}$

7. En étudiant la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\sin t - t$ (en la dérivant deux fois) ou, mieux, par une inégalité de concavité de sin ($y = \dfrac{2}{\pi}x$ est l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\pi/2$ qui se situe sous la courbe entre ces points), on obtient

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t.}$$

8. Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a alors $t^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2 t$. En multipliant par $\cos^{2n}(t) \geqslant 0$, $t^2\cos^{2n}(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)$.

Par croissance et linéarité de l'intégrale sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$.

Or $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} - \cos^{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\sin^2$. Ainsi, $\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}).}$

Avec la question 2, $I_n - I_{n+1} = I_n - \dfrac{2n+1}{2n+2}I_n = \dfrac{1}{2n+2}I_n$. On obtient alors $\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(n+1)}I_n.}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente et la question 3, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(n+1)} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

En multipliant par $\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} > 0$ avec $K_n = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} J_n$, on obtient $\boxed{0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16(n+1)}}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec les questions 6 et 3, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{4}(J_0 - K_n) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{24} - K_n\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} K_n$.

Avec la question précédente et par encadrement, $\boxed{K_n \longrightarrow 0.}$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$

Partie 3 – Calcul par des polynômes

1. On remarque que $P_n = \overline{P_n}$ (on ne conjugue que les cœfficients, bien sûr) donc $\boxed{P_n \in \mathbb{R}[X].}$

On a, comme somme de deux polynômes de degré $2n+1$, que $\deg P_n \leqslant 2n+1$. Le terme en X^{2n+1} est $\dfrac{X^{2n+1} - X^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = 0$, et par le binôme, celui en X^{2n} est $\dfrac{\binom{2n+1}{1}\mathrm{i}X^{2n} - \binom{2n+1}{1}(-\mathrm{i})X^{2n}}{2\mathrm{i}}$ *ie* $(2n+1)X^{2n}$. Donc $\boxed{\deg P_n = 2n}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(P_n) = 2n+1.}$

On peut aussi voir tout cela en utilisant la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{i}^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \mathrm{i}^k X^{2n+1-k}\right).$$

Comme les termes d'indice pair s'annulent dans les deux sommes, on obtient alors, en écrivant $k = 2p+1$,

$$P_n = \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} \mathrm{i}^{2p+1} X^{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2(n-p)}.$$

ce qui redonne les trois résultats.

2. z est racine de P_n si et seulement si $(z+\mathrm{i})^{2n+1} = (z-\mathrm{i})^{2n+1}$. Comme $\mathrm{i} (\neq 0)$ n'est pas solution, c'est équivalent à $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^{2n+1} = 1$ soit encore $(\star)$ $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ où $k \in [\![0, 2n]\!]$. On peut éliminer $k = 0$ car cela ne donne aucune solution en z. Or

$$(\star) \Longleftrightarrow (z+\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}(z-\mathrm{i}) \Longleftrightarrow z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n+1}} + \mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{2n+1}}}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{2n+1}}} = \mathrm{cotan}\frac{k\pi}{2n+1} = x_k.$$

On en déduit que $\boxed{P_n \text{ possède } 2n \text{ racines : les } \mathrm{cotan}\dfrac{k\pi}{2n+1} \text{ pour } k \in [\![1, 2n]\!].}$

3. Vu l'expression trouvée dans la première question, si $\boxed{Q_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p},}$ alors $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n = Q_n(X^2)$. On a alors $\boxed{\deg Q_n = n}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(Q_n) = 2n+1.}$

Le cœfficient de degré $n-1$ est $-\binom{2n+1}{3}=-\frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{6}=\boxed{-\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}$.

De plus, si z est racine de P_n, z^2 est racine de Q_n. Ainsi, d'après la question précédente, les $\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k\in[\![1,2n]\!]$ sont racines de Q_n.

Mais pour $k\in[\![1,n]\!]$, $0<k\leqslant n$ donc $0<\frac{k\pi}{2n+1}\leqslant\frac{n}{2n+1}\pi<\frac{\pi}{2}$, et $\operatorname{cotan}^2=\frac{1}{\tan^2}$ est injective sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (car strictement décroissante).

Cela donne donc n racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré n : on les a toutes.

$$\boxed{\text{Les racines de } Q_n \text{ sont donc les } \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1} \text{ pour } k\in[\![1,n]\!].}$$

---

4. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}$ est la somme des racines de Q_n (qui est scindé dans $\mathbb{C}$ et même dans $\mathbb{R}$ car il a n racines réelles et est de degré n). Donc si on note q_i ses cœfficients,

$$S_n=-\frac{q_{n-1}}{q_n}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1}=\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)}$$

donc $\boxed{S_n=\frac{n(2n-1)}{3}.}$

Or si $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2 x=\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1$.

Donc $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}=S_n+n$. Donc $\boxed{T_n=\frac{2n(n+1)}{3}.}$

---

5. De simples études de fonctions, ou l'intégration de $\cos t\leqslant 1\leqslant 1+\tan^2 t$ sur $[0,x]$, ou encore la convexité/concavité et l'équation de la tangente commune en 0 ($y=x$) permettent d'obtenir

$$\boxed{\forall\, x\in\left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[,\quad \sin x\leqslant x\leqslant\tan x.}$$

Avec la question précédente, on a pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, comme tout est positif,

$$\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\leqslant\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2\leqslant\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}.$$

Comme de plus $x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}\leqslant\left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}$.

En sommant, on obtient $S_n\leqslant\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant T_n$.

Ainsi,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}S_n=\pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant\pi^2\frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}T_n.$$

Finalement, par encadrement, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$

Partie 4 – Calcul par le noyau de Dirichlet

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Avec la formule trigonométrique $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b) = \sin(b+a)-\sin(b-a)$,

   il vient $\boxed{2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{(2k-1)x}{2}.}$

---

2. **Méthode 1** Par récurrence, $x \not\equiv 0[2\pi]$ donc $\sin\frac{x}{2} \neq 0$.

   - $D_0(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(0+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

     $$D_{n+1}(x) = D_n(x) + \cos((n+1)x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + 2\sin\frac{x}{2}\cos((n+1)x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

     Avec la question précédente, $D_{n+1}(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\frac{(2n+3)x}{2} - \sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.
   - Ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.}$

   Méthode 2 A l'aide d'une somme télescopique.

   En sommant la relation $2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{(2k-1)x}{2}$ pour k décrivant $[\![1, n]\!]$, on obtient après télescopage et factorisation

   $$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(1)x}{2}.$$

   Donc, avec la définition de $D_n(x)$,

   $$2\sin\frac{x}{2}(D_n(x) - \frac{1}{2}) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}.$$

   D'où $\boxed{D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}}$

   Méthode 3 Calcul d'une somme géométrique.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)$.

   Avec la formule de Moivre et comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$, $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

   Or $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{nx}{2}} - e^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\sin\frac{nx}{2}$ et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}$.

   Ainsi, $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Puis, en prenant la partie réelle, $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

   D'où $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\frac{1}{2}x + 2\sin\frac{nx}{2}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$.

   Or $2\sin\frac{nx}{2}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$, d'où $\boxed{D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}}$

---

3. En intégrant par parties, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x = \left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}\mathrm{d}x = 0 + \left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi$

d'où $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2} = \frac{(-1)^k-1}{k^2}.}$

Puis $\displaystyle L_n = \int_0^\pi xD_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi\left(\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^n x\cos(kx)\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x}{2}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x$ par linéarité.

Avec le calcul de la question précédente, $\boxed{\displaystyle L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}.}$

4. (a) Au voisinage de 0 , $\sin x \sim x$ et $\dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}} \sim \dfrac{x}{\frac{x}{2}} \sim 2$, donc $x \mapsto \dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction f en posant $\boxed{f(0)=2.}$

(b) En effectuant un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{6} - x\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + o_{x\to 0}\left(x^3\right) = \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

Ainsi $\boxed{\sin x - x\cos x \sim \dfrac{x^3}{3}}$

(c) f est dérivable sur $]0,\pi]$ et $\forall x \in]0,\pi]$, $f'(x) = \dfrac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

Or on a $\sin^2\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{4}$ et avec la question précédente, $f'(x) \sim \dfrac{x^3}{24}\dfrac{4}{x^2} \sim \dfrac{x}{6}$.
On a donc que f continue en 0, dérivable sur $]0,\pi]$, $f'(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. Par théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

Comme par ailleurs f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi] \text{ et } f'(0)=0.}$

5. ϕ et $x \mapsto -\dfrac{\cos\lambda x}{\lambda}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. En intégrant par parties,

$$\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \left[-\phi(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x$$

Donc $\displaystyle\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{-\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)+\phi(0)}{\lambda} + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x.$

Par inégalité triangulaire intégrale (licite car $\pi > 0$), $\displaystyle\left|\int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^\pi |\phi'(x)|\frac{|\cos\lambda x|}{\lambda}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x.$

Puis, par inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant \left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{|\phi(\pi)|+|\phi(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|\phi(\pi)|+|\phi(0)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x\right).$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.}$

6. Avec la question 4, f est de $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Or $L_n = \int_0^\pi x D_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$.

Comme $n+\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, avec la question précédente, $\boxed{L_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

Puis $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1-(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k)^2} = 2S_{2n+1} - \frac{1}{2}S_n$.

Donc avec la question 3, $L_{2n+1} = \frac{\pi^2}{4} - 2S_{2n+1} + \frac{1}{2}S_n$.

Reste à faire $n \longrightarrow +\infty$, ce qui permet d'obtenir $0 = \frac{\pi^2}{4} - 2\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(2)$ et enfin $\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.}$